



高等学校工程创新型“十二五”规划教材  
电子信息科学与工程类

# 信号分析与处理

Signal Analysis and Processing  
(修订版)

吴京 主编



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

高等学校工程创新型“十二五”规划教材  
电子信息科学与工程类

# 信号分析与处理

(修订版)

		吴京	主编	
吴京	王展	万建伟		
丹梅	张汉华	安成锦	编著	

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了确定性信号、线性时不变系统及信号处理的基本理论、基本概念、基本分析方法。全书共 11 章,包括信号的基本概念、描述和基本运算,信号分析与处理的基本方法,连续和离散时间傅里叶变换、离散傅里叶变换及其快速算法、拉普拉斯变换、 $z$  变换,连续和离散时间线性时不变系统分析法,模拟和数字滤波器的基本原理及其设计。本书在编排上采取先信号后系统、先连续后离散、先时域后变换域,先理论后应用展开,符合学习的认知过程。每章配有大量的例题和习题,注重难点和重点的解析与分析,习题附有参考答案,附录中配有一些应和实例的 MATLAB 脚本。

本书可作为高等院校电子、通信、信息、自动化,光电、计算机等专业的本科生教材,也可供从事相关领域的科技人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

## 图书在版编目(CIP)数据

信号分析与处理 / 吴京主编. —修订本. —北京: 电子工业出版社, 2014. 8

高等学校工程创新型“十二五”规划教材

ISBN 978-7-121-23854-3

I. ①信… II. ①吴… III. ①信号分析—高等学校—教材②信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 163724 号

策划编辑: 陈晓莉

责任编辑: 陈晓莉

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 22.25 字数: 570 千字

版 次: 2008 年 7 月第 1 版

2014 年 8 月第 2 版

印 次: 2014 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 4000 册 定价: 48.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

## 修订版前言

本教材是国防科技大学国家级信号处理系列课程教学团队编写的系列教材之一,也是国家精品课程和国家资源共享课《信号处理与系统》的主教材。《信号分析与处理》自 2008 年出版以来,已印制 3 次,被许多高等院校采用。为适应信号处理技术快速发展,结合我们自身的教学实践,参考国内外优秀教材,感到在教材内容、表达方式等方面有充实完善的必要,因而决定在原教材的基础上,重新修订本教材。本教材主要特点体现在以下几个方面:

1. 将信号与系统和数字信号处理有机地融合,构造了新的教材体系。采用了两个并重和两个基础的编写思想,即信号与系统并重,信号、系统分析与信号处理并重;时域分析是变换域分析的基础,信号分析是系统分析的基础。只有通过信号分析确定其特性,才能正确选择和设计系统,对信号进行有效的处理。教材体系结构条理清晰、内容叙述深入浅出,符合学习者的认识规律。

2. 将分析法与归纳综合法结合起来,在教材内容上体现经典与现代、连续与离散、信号与系统、分析与应用的辩证关系,使学习者在对比学习中对理论知识加深理解和掌握。例如在内容组织上先信号后系统、先连续后离散、先时域后变换域,先理论后应用。全书以第 6 章为连续与离散分界,第 9 章为理论分析与应用分界,培养学习者运用已掌握知识来学习、理解和掌握新知识、新方法和新技术能力。

3. 本教材经过我们 6 年多的教学实践,发现原教材中有个别错误和不够完善之处,这次都进行了一一修订,例如新增部分习题与解答、修订编排有误的公式,增添应用示例等。本教材将另行出版配套学习指导书和实验指导书,教学课件和教材中的应用案例可从教育部“爱课程”网站作者的课程中直接下载或向作者直接索取。

本次修订由吴京、丹梅、安成锦、周剑雄、王展、万建伟、张汉华等人完成。

由于编者水平有限,难免会有错误和不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

编 者

2014 年 6 月



# 前 言

《信号分析与处理》主要介绍信号的基本概念及信号分析与处理的基本方法。内容包括信号的基本概念和基本运算、连续和离散时间傅里叶变换、离散傅里叶变换及其快速算法、拉普拉斯变换、 $z$  变换,并对连续时间和离散时间系统及其分析方法、模拟和数字滤波器的基本原理及其设计进行了简单介绍。

本书强调了信号、系统、变换和滤波器的基本原理及应用。它涉及全面了解时域和频域关系的重要概念。目标是使学生能够对时域和频域知识进行清楚的思考,并能在两者中进行转换。全书采用了理论推导和应用分析相结合的方法,着重让读者掌握信号分析与处理的基本原理、分析和处理方法;配以一定量的习题和实验,通过让学生对实际的信号和系统进行变换域分析,训练学生解决实际问题的能力;通过介绍一些最新的信号处理方法,培养学生运用已掌握的信号处理知识来学习、理解和掌握新方法与新技术的能力。

全书突出了模拟和数字信号方面的联系。书中内容可以分成以下几个大的范围:

- (1) 信号与系统的介绍,它们的表示方法和分类。
- (2) 卷积积分法和卷积和法是一种时域分析方法,可用来把时域和频域联系起来。
- (3) 傅里叶级数、傅里叶变换及其应用。用来对模拟信号进行频谱分析。
- (4) 拉普拉斯变换及其应用。它是处理系统分析及其应用的有效工具。
- (5) 傅里叶变换和拉普拉斯变换在模拟滤波器设计中的应用。
- (6) 抽样和抽样信号的离散时间傅里叶变换(DTFT)以及 DFT 和 FFT,它们都强调了一个中心概念,就是在一个域的抽样导致了在另一个域的周期延拓。
- (7)  $z$  变换。把 DTFT 扩展到离散时间系统的分析。
- (8) IIR、FIR 数字滤波器的设计与应用。

本书分为 11 章和 1 个附录。第 1 章:从信号的分类入手,介绍了常用的连续时间信号和离散时间信号,并讨论了信号的运算和卷积运算;第 2 章:线性时不变系统的时域分析;第 3 章:连续时间信号的频域分析;第 4 章:连续时间信号及系统的复频域分析;第 5 章:连续时间滤波器,主要讨论模拟滤波器的原理和设计方法;第 6 章:抽样,从连续到离散的过渡;第 7 章:离散时间信号的频域分析;第 8 章:离散 LTI 系统的  $z$  域分析;第 9 章:离散傅里叶变换;第 10 章:快速傅里叶变换;第 11 章:数字滤波器设计,主要讨论数字滤波器的原理和设计方法。

本书的第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 7 章由吴京编写,前言、绪论、11.3 节由万建伟编写,第 9 章、第 10 章、11.1 节、11.2 节由王展编写,第 4 章、第 8 章由丹梅编写,第 5 章、第 6 章由张汉华编写,附录、参考答案、参考文献由陶华敏编写与整理。吴京负责全书的组织和修改。感谢冯德军、杨鹏、彭金龙、许可、何元为本书的文字录入、绘图、排版等所做的工作。

本书在编写过程中参考了很多优秀教材和著作。编者向收录于参考文献中的各位作者表示真诚的谢意。

限于作者的水平,不妥及错误之处在所难免,恳切希望读者给予批评指正。

编著者

2008 年 5 月于长沙

# 目 录

符号一览表	1
绪论	2
0.1 信号与系统	2
0.2 信号处理	4
0.3 信号分析与处理的主要研究内容	4
第 1 章 信号与系统的基本概念	7
1.1 信号及其分类	7
1.1.1 确定性信号和随机性信号	7
1.1.2 连续时间信号和离散时间信号	7
1.1.3 周期信号和非周期信号	8
1.1.4 功率信号和能量信号	9
1.1.5 对称信号和非对称信号	10
1.2 常用信号及其基本特性	10
1.2.1 连续时间复指数信号	11
1.2.2 连续时间单位阶跃和单位冲激信号	12
1.2.3 离散时间单位样值信号和单位阶跃信号	15
1.2.4 离散时间复指数信号	17
1.3 信号时域运算	19
1.3.1 信号的和、积运算	19
1.3.2 信号的积分与微分运算	20
1.3.3 信号波形的翻转、展缩与平移	21
1.3.4 信号的分解	24
1.4 系统及其表示	27
1.4.1 系统	27
1.4.2 系统的表示	27
1.5 系统的分类	29
1.5.1 因果与非因果系统	29
1.5.2 连续与离散系统	29
1.5.3 有记忆系统与无记忆系统	30
1.5.4 时不变系统与时变系统	30
1.5.5 线性与非线性系统	31
1.5.6 其他的系统分类	33
习题一	33

<b>第 2 章 线性时不变系统的时域分析</b>	37
2.1 连续时间系统的时域分析	37
2.1.1 微分方程的建立	37
2.1.2 微分方程的求解	39
2.1.3 零输入响应与零状态响应	42
2.2 离散时间系统的时域分析	44
2.2.1 差分方程的建立	44
2.2.2 差分方程的求解	46
2.2.3 零输入响应与零状态响应	48
2.3 系统的单位冲激响应与单位样值响应	49
2.3.1 连续时间系统的单位冲激响应	50
2.3.2 离散时间系统的单位样值响应	51
2.4 连续时间 LTI 系统:卷积积分	52
2.4.1 利用卷积积分计算系统的零状态响应	52
2.4.2 卷积积分的图解法	54
2.4.3 卷积积分的性质	56
2.5 离散时间 LTI 系统:卷积和	59
2.5.1 零状态响应:卷积和	59
2.5.2 卷积和的性质	60
2.5.3 卷积和的计算	60
2.6 系统的特征根及特征模式对系统行为的影响	63
2.6.1 系统行为对特征模式的依赖	63
2.6.2 系统时间常数	63
2.6.3 系统时间常数与上升时间	64
2.6.4 系统时间常数与滤波	65
2.6.5 时间常数与脉冲色散	66
2.6.6 时间常数与信息传输速率	66
2.6.7 谐振现象	66
习题二	67
<b>第 3 章 连续时间信号的频域分析</b>	73
3.1 任意信号分解为正交函数	73
3.2 周期信号的傅里叶级数	73
3.2.1 三角函数形式的傅里叶级数	74
3.2.2 指数函数形式的傅里叶级数	78
3.2.3 周期信号的频谱	80
3.2.4 LTI 系统对周期信号的响应	85
3.3 非周期信号的傅里叶变换	86
3.3.1 傅里叶变换的导出	86
3.3.2 常用信号的傅里叶变换	88

3.3.3 傅里叶变换的性质 .....	91
3.3.4 周期信号的傅里叶变换 .....	103
习题三 .....	104
<b>第4章 连续时间信号及系统的复频域分析</b> .....	<b>109</b>
4.1 拉普拉斯变换 .....	109
4.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换 .....	109
4.1.2 收敛域 .....	110
4.1.3 单边拉普拉斯变换 .....	111
4.1.4 拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系 .....	113
4.1.5 单边拉普拉斯变换的性质 .....	114
4.2 单边拉普拉斯反变换 .....	118
4.2.1 利用拉普拉斯变换性质求解 .....	118
4.2.2 部分分式展开法 .....	119
4.3 利用拉普拉斯变换求解 LTI 系统的响应 .....	120
4.3.1 微分方程的复频域求解 .....	121
4.3.2 电路系统的复频域求解 .....	122
4.4 系统函数分析 .....	124
4.4.1 系统函数 .....	124
4.4.2 系统因果性和稳定性分析 .....	127
4.5 系统的图形表示方法 .....	128
4.5.1 系统框图 .....	129
4.5.2 信号流图 .....	130
4.5.3 梅森公式 .....	132
4.5.4 系统模拟 .....	133
习题四 .....	136
<b>第5章 连续时间滤波器</b> .....	<b>140</b>
5.1 线性时不变系统的频率响应 .....	140
5.2 线性时不变系统中信号的传输 .....	144
5.2.1 无失真传输条件 .....	144
5.2.2 信号的无失真传输 .....	146
5.2.3 信号的滤波 .....	149
5.3 理想和实际滤波器 .....	150
5.3.1 理想滤波器的频域特性 .....	150
5.3.2 理想滤波器的时域特性 .....	152
5.3.3 实际低通滤波器特性 .....	154
5.4 系统函数极零点对滤波器特性的影响 .....	156
5.4.1 系统函数的极零点与系统频率响应的关系 .....	156
5.4.2 巴特沃斯(Butterworth)滤波器 .....	163
5.4.3 切比雪夫(Chebyshev)滤波器 .....	165

习题五 .....	167
<b>第 6 章 抽样:从连续到离散的过渡</b> .....	171
6.1 时域抽样 .....	171
6.1.1 抽样的数学模型 .....	171
6.1.2 冲激串抽样 .....	172
6.1.3 时域抽样定理 .....	173
6.2 实际抽样的过程 .....	178
6.3 实际信号的重建过程 .....	181
6.3.1 内插公式和内插函数 .....	181
6.3.2 零阶保持内插和线性内插 .....	182
6.4 频谱混叠 .....	184
6.5 频域抽样定理 .....	188
习题六 .....	190
<b>第 7 章 离散时间信号的频域分析</b> .....	194
7.1 离散时间傅里叶级数(DTFS) .....	194
7.1.1 周期信号的离散时间傅里叶级数表示 .....	194
7.1.2 周期信号的频谱 .....	196
7.2 非周期信号的傅里叶变换 .....	200
7.2.1 非周期信号的傅里叶积分表示 .....	200
7.2.2 傅里叶频谱的特性 .....	202
7.2.3 离散时间傅里叶变换性质 .....	206
7.3 几种傅里叶变换的关系 .....	210
7.3.1 连续时间傅里叶变换(CTFT) .....	210
7.3.2 连续时间傅里叶级数(CTFS) .....	211
7.3.3 离散时间傅里叶变换(DTFT) .....	211
7.3.4 离散时间傅里叶级数(DTFS) .....	211
7.4 离散时间线性时不变系统的频域分析 .....	212
7.4.1 系统响应的频域表示 .....	212
7.4.2 系统频率响应和单位样值响应的计算 .....	213
7.4.3 滤波特性 .....	214
习题七 .....	215
<b>第 8 章 离散时间 LTI 系统的 <math>z</math> 域分析</b> .....	219
8.1 $z$ 变换 .....	219
8.1.1 从离散时间傅里叶变换(DTFT)到 $z$ 变换 .....	219
8.1.2 收敛域 .....	220
8.1.3 单边 $z$ 变换 .....	222
8.1.4 $z$ 变换性质 .....	222
8.1.5 $z$ 反变换 .....	229
8.2 利用单边 $z$ 变换求解 LTI 系统的响应 .....	231

---

8.3 系统函数 .....	232
8.3.1 系统函数 .....	232
8.3.2 由极零点图确定频率响应 .....	234
8.3.3 系统因果性和稳定性 .....	236
8.3.4 系统的图形表示方法 .....	237
习题八 .....	238
<b>第9章 离散傅里叶变换</b> .....	<b>241</b>
9.1 离散傅里叶变换(DFT) .....	241
9.2 DFT 与 $z$ 变换、傅里叶变换的相互关系 .....	245
9.3 DFT 等效数字滤波器组 .....	247
9.4 DFT 的性质 .....	249
9.4.1 线性 .....	249
9.4.2 序列的圆周移位(循环移位) .....	250
9.4.3 共轭对称性 .....	251
9.4.4 循环卷积 .....	252
9.4.5 循环卷积与线性卷积关系 .....	254
9.5 用 DFT 实现线性时不变系统 .....	256
9.5.1 DFT 计算线性卷积 .....	256
9.5.2 重叠相加法 .....	256
9.5.3 重叠保留法 .....	258
9.6 DFT 进行信号的频谱分析 .....	259
9.6.1 混叠失真 .....	261
9.6.2 频谱泄漏 .....	262
9.6.3 栅栏效应 .....	263
习题九 .....	263
<b>第10章 快速傅里叶变换</b> .....	<b>265</b>
10.1 改进 DFT 计算的方法 .....	266
10.1.1 直接计算 DFT 的特点 .....	266
10.1.2 减少运算量的方法 .....	266
10.2 按时间抽取(DIT)的 FFT 算法 .....	267
10.2.1 算法原理 .....	267
10.2.2 时间抽取 FFT 的运算量 .....	271
10.2.3 时间抽取法的运算特点 .....	272
10.3 按频率抽取(DIF)的 FFT 算法 .....	274
10.3.1 算法原理 .....	274
10.3.2 运算特点 .....	277
习题十 .....	277
<b>第11章 数字滤波器设计</b> .....	<b>278</b>
11.1 数字滤波器的基本结构 .....	278

---

11.1.1	数字滤波器结构的表示方法	278
11.1.2	无限长单位抽样响应数字滤波器的基本结构	279
11.1.3	有限长单位抽样响应数字滤波器的基本结构	284
11.2	IIR 数字滤波器的设计	285
11.2.1	模拟低通滤波器原型	285
11.2.2	脉冲响应不变法	288
11.2.3	双线性变换法	291
11.2.4	设计 IIR 数字滤波器的频率变换法	294
11.3	FIR 滤波器设计	298
11.3.1	线性相位 FIR 滤波器的特征	298
11.3.2	窗函数设计法	302
11.3.3	利用频率抽样技术设计	308
11.3.4	IIR 滤波器和 FIR 滤波器的比较	312
习题十一		313
附录 A	部分分式展开	316
附录 B	常用数学用表	320
附录 C	模拟滤波器设计 MATLAB 程序	325
附录 D	FIR 滤波器设计例程	328
部分习题参考答案		331
参考文献		346

# 符号一览表

$\delta(t)$	单位冲激信号
$\delta(n)$	单位样值(脉冲)信号
$u(t), u(n)$	连续 / 离散单位阶跃信号
$x(t)$	连续时间信号
$x(n)$	离散时间信号
$T, \omega_0$	连续时间信号的基本周期, 基频
$N, \Omega_0$	离散时间信号的基本周期, 基频
$N$	某些场合表示信号长度
$X(j\omega)$	$x(t)$ 的傅里叶变换
$X_k$	$x(t)$ 的傅里叶级数系数
$X(\Omega)/(e^{j\Omega})$	$x(n)$ 的离散时间傅里叶变换
$X(s)$	$x(t)$ 的拉普拉斯变换
$X(z)$	$x(n)$ 的 $z$ 变换
$X(k)$	$x(n)$ 的离散傅里叶变换
$x(t), x(n)$	系统输入
$y(t), y(n)$	系统输出
$h(t)$	单位冲激响应
$h(n)$	单位样值(脉冲)响应
$y_{zi}(t), y_{zi}(n)$	零输入响应
$y_{zs}(t), y_{zs}(n)$	零状态响应
$y_n(t), y_n(n)$	固有响应
$y_f(t), y_f(n)$	强迫响应
$H(j\omega)$	连续时间系统的频率响应
$ H(j\omega) $	连续时间系统的幅频响应(幅频特性)
$\angle H(j\omega)$	连续时间系统的相频响应(相频特性)
$H(\Omega)/H(e^{j\Omega})$	离散时间系统的频率响应
$ H(\Omega)  /  H(e^{j\Omega}) $	离散时间系统的幅频响应(幅频特性)
$\angle H(\Omega)/\angle H(e^{j\Omega})$	离散时间系统的相频响应(相频特性)
CTFS	连续时间傅里叶级数
CTFT	连续时间傅里叶变换
DTFT	离散时间傅里叶变换
DTFS	离散时间傅里叶级数
DFT	离散傅里叶变换
FFT	快速傅里叶变换
LTI	线性时不变系统



# 绪 论

信号是信息学科研究的基本内容,信号与系统是两个用得极为广泛的基本概念,与这些概念有关的方法在很多科学和技术领域起着重要的作用。无论在自然科学还是在社会科学中,大至天体宇宙、人类社会,小至生物细胞、原子结构,都存在有信号与系统的应用研究问题。在这些不同的领域中,虽然信号与系统的物理属性和表现形式各不相同,但全都具有两个基本的共同点,即信号总是一个或几个独立变量的函数,该函数一般都包含了关于某些现象性质的信息;而系统总是对给定的信号作出响应而产生出另外的信号。

本书以信号分析为基础,系统分析为桥梁,处理技术为手段,系统综合为目的。在内容上,离散与连续并重;分析与综合并重;经典与现代并重。

## 0.1 信号与系统

信息是人类社会和自然界中需要传送、交换、存储和提取的抽象内容。由于信息是抽象的内容,为了传送和交换它,首先必须用语言、文字、图像和数据将它表达出来。人们称表示信息的语言、文字、图像和数据等为消息。运载信息的光、声、电等物理量被称为信号,所以信号就是信息的一种物理体现。

- (1) 物理上,信号是信息寄寓变化的形式;
- (2) 数学上,信号是一个或多个变量的函数;
- (3) 形态上,信号表现为一种波形;
- (4) 自变量:时间,位移,周期,频率,幅值,相位等。

概括地讲,信息是抽象的;消息是具体的,但不是物理的;而信号则既是具体的,又是物理的。这个世界到处都充满了信号,无论是来自自然的还是人们发出的。例如,在我们说话时气压的变化、一天中气温的高低,以及心脏产生的周期性心电信号。从基本含义上讲,信号是用来传递某种消息或信息的物理形式。虽然信号的形式各不相同,但它们都是传递信息或消息的载体。对于不同的学科领域,信息的载体具有不同的物理形式,常见的形式如声、光、电、力等。

在任何情况下,信号值都与它的幅度相对应。假设  $t$  为连续时间变量, $nt_s$  为离散时间变量,其中  $t_s$  是抽样间隔, $n$  是一个整数。同时也假设幅度为一个连续变量,或被量化为有限数目的极值间的离散电平。这会产生以下四种可能的信号,如图 0.1 所示。

信息的交换、传送、存储和提取是借助于信号来完成的。而信号是物理量,它的传输、存储和处理必须借助于物理设备才能实现。这些传输、存储和处理信号的设备称为系统。广义上讲,系统是由各不相同但彼此影响的单元有机地集合起来实现某个总目标的一种组合。系统强调的是事物间的相互制约、运动和变化,强调的是“森林”,是全局。广义而言,系统是对输入信号作出响应的物理结构。其本质是对输入信号进行相应的处理,并将处理后的信号作为系统的输出,这种输出也称为系统的响应。例如,人体的味觉神经系统可以感觉到食物的酸甜苦辣;计算

机的显示系统可以在屏幕上显示键盘输入的每一个字符;通信网络系统可以根据输入的信号将天各一方的亲朋好友互联在一起。虽然系统一词包罗万象,种类繁多,大小不一,但在对输入信号作出响应这一点上是相通的。

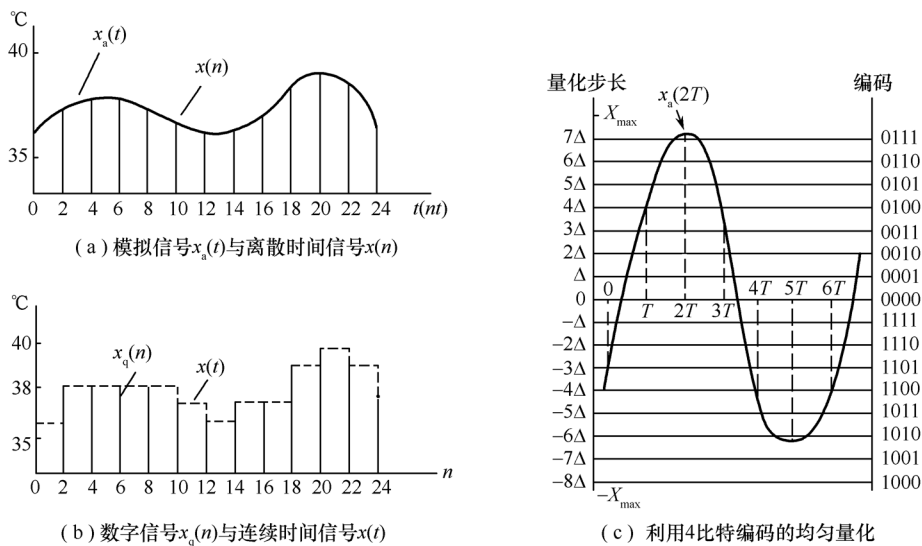


图 0.1 模拟、抽样、量化及数字信号

按照系统的形成来划分,系统大致可分为两类:一类是自然形成的系统,如天体地球等;另一类是人为设计的系统,如电子系统、通信系统等。人为设计的系统一般是根据设计人员的需要来实现某种特定的功能。这种系统通常由若干相互关联的元器件或子系统进行连接而形成一个整体。例如,一个最简单的积分电路系统可以由一个电阻和一个电容元件组成,其基本功能是对输入信号进行积分后输出。本书仅讨论人为设计的系统。

按所处理的信号种类的不同可将系统分为 4 类:

- (1) 模拟系统:处理模拟信号,系统输入、输出均为连续时间连续幅度的模拟信号。
- (2) 连续时间系统:处理连续时间信号,系统输入、输出均为连续时间信号。
- (3) 离散时间系统:处理离散时间信号(序列),系统输入、输出均为离散时间信号。
- (4) 数字系统:处理数字信号,系统输入、输出均为数字信号。

系统可以是线性的或非线性的、时不变的或时(移)变的。

分析一个系统,一般按照下面的三个步骤:① 建立数学模型;② 求数学解;③ 对所求得的了解赋予物理解释。其步骤如图 0.2 所示。

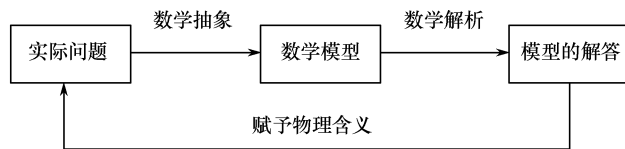


图 0.2 系统分析三步骤

## 0.2 信号处理

信号处理是研究用系统对含有信息的信号进行处理(变换),以获得人们所希望的信号,从而达到提取信息、便于利用的一门学科。信号处理的内容包括滤波、变换、检测、谱分析、估计、压缩、识别等一系列的加工处理。

因为多数科学和工程中遇到的是模拟信号,所以以前都是研究模拟信号处理的理论和实现。但是模拟信号处理难以做到高精度,受环境影响较大,可靠性差,且不灵活等。随着大规模集成电路以及数字计算机的飞速发展,加之从 20 世纪 60 年代末以来数字信号处理理论和技术的成熟与完善,用数字方法来处理信号,即数字信号处理,已逐渐取代模拟信号处理。

图 0.3 是信号处理的概念性图示。模拟信号的数字处理要求在处理之前使用模拟信号到数字信号的转换器(ADC)来抽样模拟信号,还要求利用数字信号到模拟信号的转换器(DAC)将处理过的数字信号再转换回模拟信号。

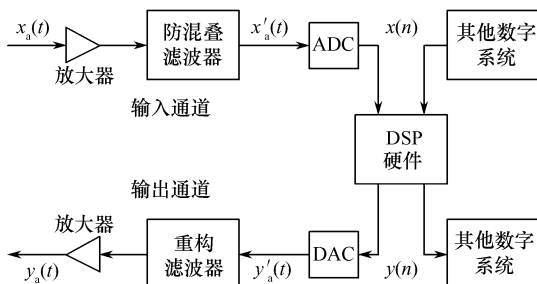


图 0.3 模拟信号与数字信号处理

其中,模拟输入信号经过放大和防混叠低通滤波后,送到模 / 数转换器,转换成数字信号,再将数字信号送到 DSP 中进行必要的算法处理,待处理完成后,可根据任务需要将处理结果转换成模拟信号,同时,数 / 模转换器的输出还须经过重构象滤波和放大后,才能得到最终的所要求的模拟输出信号。

对于某些实时应用,输入数据已经是数字形式,而输出数据也可能不必再转换成模拟信号。例如,要处理的数字信号已经存放在计算机的存储器中以备后用,或者运算结果可以用图形显示出来。而在其他应用中,DSP 系统要求产生数字信号,如用于蜂窝电话的语音合成,CDMA 系统的随机数产生器等。

## 0.3 信号分析与处理的主要研究内容

上面提到的例子中,有些信号是随时间连续变化的,而另一些则仅仅在离散时间点上有值。由于对这两类信号的描述以及对这些信号作出响应或处理的系统的描述,都有着明显的不同,因此,自然导致两种并行的信号与系统分析范畴。其一就是以连续时间描述的现象和过程,而另一个则是以离散时间描述的现象和过程。有关连续时间信号与系统、离散时间信号与系统的概念和方法都有着悠久的历史,而且在概念上是息息相关的。然而在历史上由于两者在应用上各行其道,因此,它们大部分的研究和发展多少都是独自进行的。连续时间信号与系统在物

理学方面,以及近代电路理论和通信系统方面的应用有很深的渊源,而离散时间信号与系统却在数值分析、统计学,以及经济学和人口统计学等数据分析应用有关的时间序列分析中找到了它的根基。但是,在近几十年内,连续时间和离散时间信号与系统变得日益交织在一起,而在应用上也日益结合。造成这种变化的强大动力是在系统实现和信号产生技术上取得的惊人进展。特别是高速数字计算机、集成电路和尖端高密度器件制造技术等所取得的难以置信的飞速发展,已经使得考虑用等间隔样本来表示和处理连续时间信号(即转换为离散时间信号)具有越来越多的好处。

鉴于连续时间信号与系统和离散时间信号与系统之间的相互关系日益密切,以及与各自有关的一些概念和方法之间的紧密联系,本书选择了以并行的方式来讨论这两种类型的信号与系统。由于两者在很多概念上是类似的(但不是完全一样),因此,并行地处理可以做到在概念和观点上两者互为分享,且可更好地把注意力放在它们之间的类同点和不同点上。此外,某些概念从一种系统引入要比从另一种系统来得容易接受;而一旦在一种系统中被理解之后,就可简而易之地把这些概念用到另一系统中去。

信号理论的研究主要有两个方面的内容,即信号分析与信号综合。信号分析主要研究信号的描述方法、信号数学模型的建立,以及信号的基本特性;信号综合则是根据具体的要求来设计、产生所需要的信号。

系统理论的研究方法也有分析与综合之分。系统分析包括建立系统的数学模型,以及借助系统模型研究系统的基本属性,如系统的响应特性、频率特性、稳定性等;系统综合则是在给定的条件下设计出所需要的系统。例如,要求所设计的系统对某种给定的输入信号产生某种给定的输出信号就属于系统综合的问题。

虽然建立系统模型需要一些相应的专业基础知识,而且不同的系统所需要的专业基础知识又各不相同,但是,当把系统抽象为数学模型以后,它们的分析方法是相通的。因此,本书的内容仅限于信号与系统的分析,主要讨论系统对不同输入信号的响应,而要确定系统的响应,有关信号与系统的特性及其描述方法当然是必不可少的研究内容。此外,本书所研究的系统只涉及线性时不变系统。之所以只讨论线性时不变系统,不仅由于大多数物理系统可以近似为线性时不变系统,更重要的是,长期以来对线性时不变系统的研究已经形成了一套完整、严密且能普遍适用的分析方法,而且,这些分析方法也能为研究非线性时不变系统所借鉴。

信号与系统是两个密切相关的概念。在许多实际应用中,尤其是在信号提取、信号恢复、信号增强、语音识别等数字信号处理的课题以及大规模集成电路的设计中,它们往往被有机地融合在一起。例如,为了实时地识别语音,一方面要分析研究语音信号的各种特性,建立语音信号的数学模型,确定语音信号的编码方法以及识别算法;另一方面则要仔细设计专用硬件,而硬件的设计又和语音信号的种种特性息息相关。信号与系统这种密切相关的特点也是本课程得以受到广泛重视的原因之一。

本书将从时域和变换域两方面对信号和线性时不变系统进行分析讨论,强调时域分析与频域分析以及它们之间的对应关系和内在关系,分析工具包括有微分方程、差分方程、傅里叶变换、拉普拉斯变换以及 $z$ 变换等。分析主线如图0.4所示。

以信号施加于系统,然后求取系统响应为分析主线,按照先时域后频域,再复频域,先连续时间系统后离散时间系统的顺序进行。

长期的历史实践已经证明,这些经典的分析方法对解决具体的实际问题确实行之有效,它

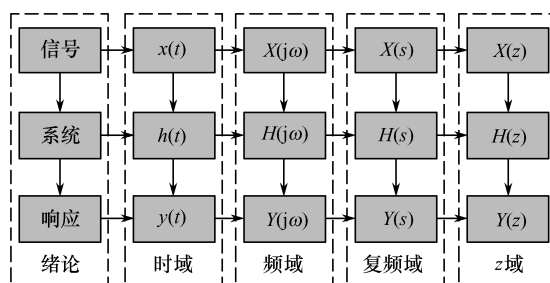


图 0.4 信号与系统分析之间的关系

们在不同的学科领域中都得到了广泛而重要的应用。毫无疑问,随着科技的发展与进步,这些方法已经得到并仍将得到进一步地发展,其应用领域也将得到进一步地拓宽和延伸。因此,扎实地掌握这些基本的分析方法,透彻地理解相应的物理概念,深入地吸收寄寓于这些方法和概念中的有关思想,是学好后续课程以及今后工作中具有发展潜力的可靠保证。

# 第 1 章 信号与系统的基本概念

信号与系统分析、处理的任务是研究信号与系统分析、处理的基本理论和方法。随着近代科学技术的发展,数字计算机的广泛应用,使得信号与系统日益复杂和综合,从而大大促进了其理论研究的发展。

这一章讨论有关信号和系统的一些基本概念和重要性质,还要讨论一些常用信号及信号的基本运算,它们在信号分析中占有十分重要的地位。本章学习的目的是为理解全书其他内容打下牢固的基础。

## 1.1 信号及其分类

所谓信号就是信息的载体,是信息的物理体现。例如,视频信号或音频信号,或一个公司每月的销售额,或某股票市场每天的收盘价,等等。在这些例子中,信号都是自变量为时间的函数。然而,情况也并非如此。比如说,当电荷分布在某一物体上时,信号就是电荷密度,它是空间的函数,而不是时间的函数。在本章中将讨论的信号几乎都是时间的函数。然而这些讨论也完全适用于其他的自变量。

信号的基本形式是取值随时间变化的量(时间  $t$  称为信号的自变量)。这种取值变化常常采用解析函数表达式,或者时间函数的图形(称为信号的波形图)来表示。除了解析函数表达式与波形图这两种直观的描述方法之外,还用频谱或其他正交变换的方式来描述信号,在后续章节中将介绍。

信号的形式是多种多样,根据其自身的特征,可对信号进行如下分类。

### 1.1.1 确定性信号和随机性信号

按照信号是否存在随机性可以将信号分为确定性信号和随机性信号。随机性信号在某一时刻的取值具有不可预知的不确定性,只能通过大量试验测出它在某一时刻取值的概率分布。这类信号是随机信号分析的研究对象。确定性信号可以表示为时间函数,且它的参量都确定,给定某一时刻的取值是完全确定的,其所包含的信息的不同就体现在取值随时间的不同变化规律上。本书只讨论确定性信号。

### 1.1.2 连续时间信号和离散时间信号

按照信号自变量取值的连续性,可以将信号分为连续时间信号和离散时间信号。在连续的时间范围内有定义的信号称为连续时间信号,简称连续信号。本书一般以  $x(t)$  表示连续时间信号,如图 1.1(a) 所示。

在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号,简称离散信号。这里的“离散”是

指信号的定义域(时间)是离散的,它只取某些规定的值,离散时间信号定义在一些离散时刻  $t_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , 在其余的时间,信号没有定义,时刻  $t_n$  与  $t_{n+1}$  之间的间隔  $T_n = t_{n+1} - t_n$  可以是常数,也可以随  $n$  变化。本书只讨论  $T_n$  是常数的情况。若令相继时刻  $t_n$  与  $t_{n+1}$  的间隔为  $T$ ,则离散信号只在均匀离散时刻  $t = \dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$  时有定义。本书一般以  $x(nT)$  (其中  $n$  为整数) 表示离散时间信号,并把  $x(nT)$  简记为  $x(n)$ 。因而离散时间信号又称为序列,如图 1.1(b) 所示。

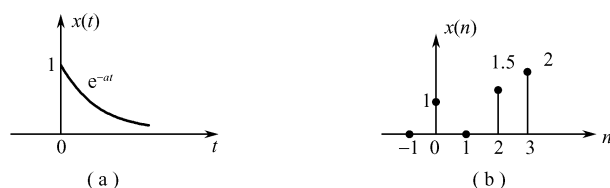


图 1.1 连续时间信号和离散时间信号

信号的自变量的取值可以是连续的,或是离散的,信号的取值也可以是连续的,或离散的。通常情况下我们把自变量和取值均为连续的信号称为**模拟信号**,而自变量和取值均为离散的信号称为**数字信号**。

### 1.1.3 周期信号和非周期信号

一个定义在  $(-\infty, \infty)$  区间的连续时间信号  $x(t)$ , 如果存在一个最小的正值  $T$ , 对全部  $t$ , 下式成立:

$$x(t) = x(t + mT), m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

则称  $x(t)$  为**周期信号**, 其基波周期为  $T$ , 否则称  $x(t)$  为非周期信号。

一个定义在  $(-\infty, \infty)$  区间的离散时间信号  $x(n)$ , 如果存在一个最小的正整数值  $N$ , 对全部  $n$ , 下式成立:

$$x(n) = x(n + mN), m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

则称  $x(n)$  为**周期信号**, 其基波周期为  $N$ , 否则称  $x(n)$  为非周期信号。图 1.2 和图 1.3 分别给出了周期信号和非周期信号的实例。

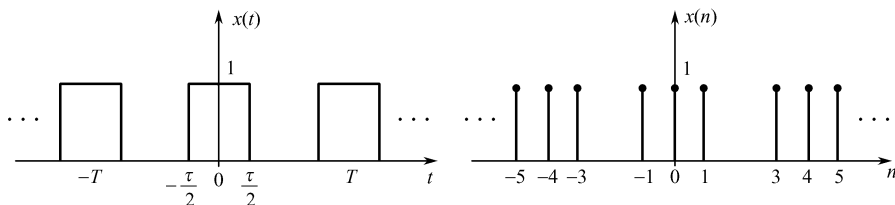


图 1.2 周期信号

由于周期信号具有重复性, 我们可以得到周期信号的另一种表示方法。假设在  $t = 0$  点附近的一个基波周期内的信号为  $x(t)$ , 则周期信号  $x_T(t)$  将是  $x(t)$  在时间轴上按基波周期  $T$  进行延拓的结果, 即

$$x_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + mT), m \text{ 为整数} \quad (1.3)$$

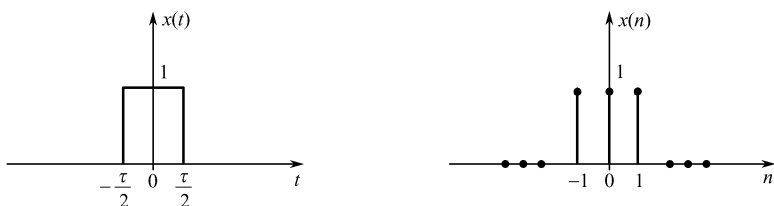


图 1.3 非周期信号

式(1.3)反映了  $x(t)$  和  $x_T(t)$  之间的关系,在后续章节的学习中将经常用到。对离散的周期信号有同样的结论:

$$x_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN), m \text{ 为整数} \quad (1.4)$$

而非周期信号不具备这种周期重复性,其波形在有限的时间范围内不会重复出现,因此也可把非周期信号看成周期为无穷大的周期信号。

#### 1.1.4 功率信号和能量信号

信号  $x(t)$  看作电压(或电流),则当  $x(t)$  加在  $1\Omega$  电阻两端时,将提供给该电阻大小为  $|x(t)|^2$  的瞬时功率,在  $(-T/2, T/2)$  区间提供的能量为  $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ ,平均功率为  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ 。

信号能量定义为在时间区间  $(-\infty, \infty)$  信号  $x(t)$  的能量,用字母  $E$  表示,即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.5)$$

信号功率定义为在时间区间  $(-\infty, \infty)$  信号  $x(t)$  的平均功率,用  $P$  表示,即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

由于式(1.5)和式(1.6)中被积函数是  $x(t)$  的模方,所以信号能量  $E$  和功率  $P$  都是非负实数,即使  $x(t)$  是复信号亦是如此。

若信号  $x(t)$  的能量  $E$  满足:  $0 < E < \infty$  (且  $P = 0$ ),则称  $x(t)$  为能量有限信号(简称能量信号);若信号  $x(t)$  的功率满足:  $0 < P < \infty$  (且  $E = \infty$ ),则称  $x(t)$  为功率有限信号(简称功率信号)。

一般而言,持续时间有限的非周期信号都是能量有限信号,而周期信号或其他一些持续时间无限长的信号都是功率有限信号。

对离散时间信号,序列  $x(n)$  的能量  $E$  和平均功率  $P$  可分别定义为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.7)$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.8)$$



### 1.1.5 对称信号和非对称信号

在信号分析中还有一类信号为对称信号。典型的对称信号有奇对称信号、偶对称信号、奇谐对称信号和偶谐对称信号,分别简称为奇信号、偶信号、奇谐信号和偶谐信号。

**偶信号**  $x_e(t)$  的波形关于坐标纵轴镜像对称,如图 1.4(a) 所示;**奇信号**  $x_o(t)$  的波形关于坐标原点对称,如图 1.4(b) 所示。奇、偶信号的定义分别为

$$x_e(t) = x_e(-t), x_o(t) = -x_o(-t) \quad (1.9)$$

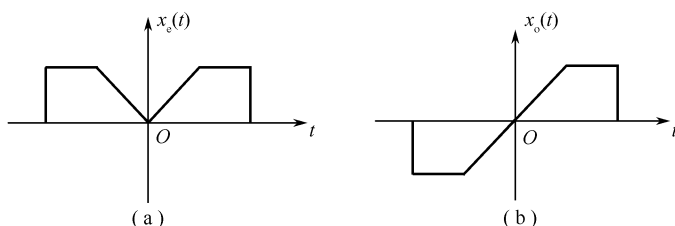


图 1.4 奇信号和偶信号

同样,对离散信号而言,奇偶信号的定义为

$$x_e(n) = x_e(-n), x_o(n) = -x_o(-n) \quad (1.10)$$

**奇谐信号**是指周期信号在时间轴上平移半个周期后与原信号关于时间轴镜像对称,如图 1.5(a) 所示,即

$$x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (1.11)$$

**偶谐信号**是指周期信号在时间轴上平移半个周期后与原信号重合,如图 1.5(b) 所示,即

$$x(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (1.12)$$

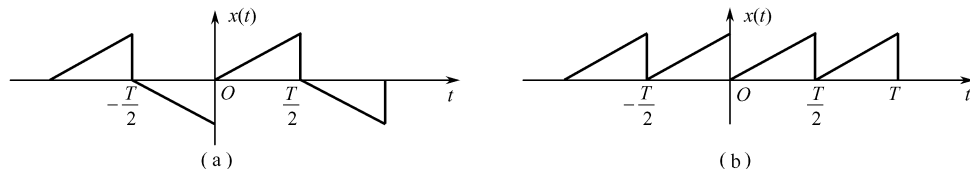


图 1.5 奇谐信号和偶谐信号

不具备上述对称特性的信号称为非对称信号。

## 1.2 常用信号及其基本特性

本节介绍几个常用的时间信号。由于这些信号经常遇到,而且是构成其他很多信号的基本单元,故把它们统称为基本信号。了解这类信号的时域描述及其特性是非常必要的。

### 1.2.1 连续时间复指数信号

在信号与系统分析中,一个重要信号是复指数信号,数学描述为

$$x(t) = e^{st} \quad -\infty < t < \infty \quad (1.13)$$

式中,  $s$  为复数,  $s = \sigma + j\omega$ ;  $\sigma, \omega$  为实数。

因此,式(1.13) 利用欧拉公式可写成

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} (\cos\omega t + j\sin\omega t) \quad -\infty < t < \infty \quad (1.14)$$

由于  $s^* = \sigma - j\omega$  (模的共轭),那么

$$e^{s^*t} = e^{(\sigma-j\omega)t} = e^{\sigma t} (\cos\omega t - j\sin\omega t) \quad -\infty < t < \infty \quad (1.15)$$

可得

$$e^{\sigma t} \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) \quad -\infty < t < \infty \quad (1.16)$$

可见  $e^{st}$  是  $e^{j\omega t}$  函数的推广,这里频率变量  $j\omega$  被推广到复变量  $s = \sigma + j\omega$ ,为此将变量  $s$  称为复频率。当式(1.13) 中  $s$  取不同值时,可以派生出许多信号。下列这些信号都可以从  $e^{st}$  中得到:

- (1) 一个常数  $k = ke^{0t}$ , ( $s = 0$ ),  $k$  为常数,常将此信号称为直流信号;
- (2) 实指数信号  $e^{\sigma t}$ , ( $\omega = 0, s = \sigma$ );
- (3) 正弦信号  $\cos\omega t$ , ( $\sigma = 0, s = \pm j\omega$ );
- (4) 指数变化的正弦  $e^{\sigma t} \cos\omega t$ , ( $s = \sigma \pm j\omega$ )。

这些信号如图 1.6 所示。

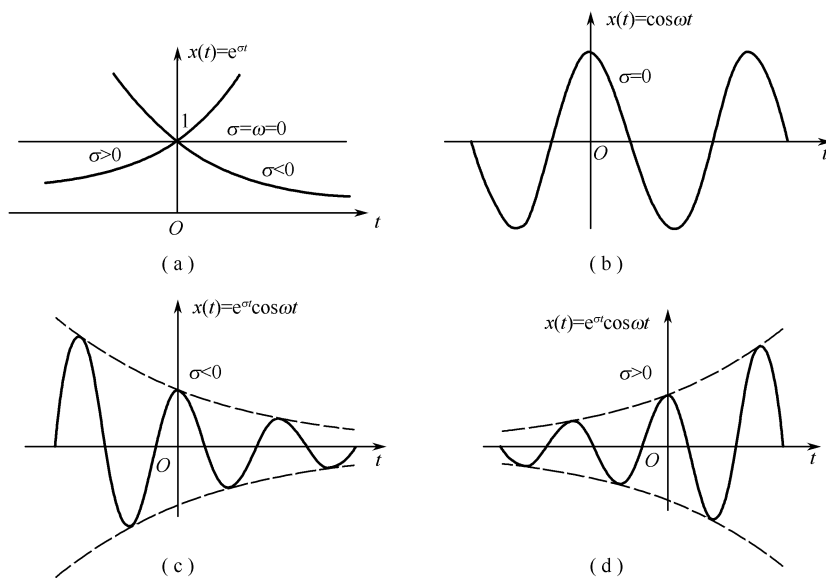
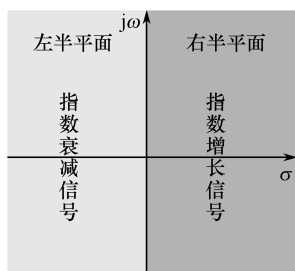


图 1.6 复指数信号

可以很方便地将复频率  $s$  表示在一个复平面(又称  $s$  平面)上。如图 1.7 所示,水平轴是实

图 1.7 复平面( $s$ 平面)

轴( $\sigma$ 轴),垂直轴是虚轴( $j\omega$ 轴)。 $s$ 虚部的绝对值是 $|\omega|$ (弧度/秒),它指出 $e^{st}$ 的振荡频率;实部 $\sigma$ 给出 $e^{st}$ 幅度增长或衰减速率的有关信息。对于其复频率位于实轴( $\sigma$ 轴,其中 $\omega = 0$ )上的信号,振荡频率为零,这些信号就是单调递增或衰减的指数信号,如图 1.6(a)所示。对于其复频率位于虚轴( $j\omega$ 轴,其中 $\sigma = 0$ )上的信号, $e^{st} = 1$ ,因此这些信号就是通常具有等幅的正弦信号,如图 1.6(b)所示。 $s = 0$ ( $\sigma = \omega = 0$ )的情况对应一个常数(直流)信号,因此 $e^{0t} = 1$ ,对应图 1.6(a)所示。对于图 1.6(c)和图 1.6(d)的信号, $\sigma$ 和 $\omega$ 均不为零,复频率 $s$ 是复数,它不位于任何一个轴上。图 1.6(c)的信号是指数衰减,因此 $\sigma$ 为负, $s$ 位于虚轴的左边。相反,图 1.6(d)的信号是指数增长,因此 $\sigma$ 为正, $s$ 位于虚轴的右边。据此, $s$ 平面(图 1.7)可划分为两部分:对应于指数衰减信号的左半平面(LHP)和对应于指数增长信号的右半平面(RHP)。虚轴将两个区域分开,并对应于等幅振荡的信号。

## 1.2.2 连续时间单位阶跃信号和单位冲激信号

### 1.2.2.1 单位阶跃信号

在我们的大多讨论中,信号都是在 $t = 0$ 开始的(因果信号)。这类信号能非常方便地利用图 1.8 中单位阶跃信号来描述,这个信号可定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

从式(1.17)可见,单位阶跃信号在 $t = 0$ 有一个不连续点,或称为跳变点,其跳变值为 1。正是由于这么一个跳变点,且跳变值为 1,才将该信号形象地称为单位阶跃信号。对于 $u(t)$ 在跳变点 $t = 0$ 的函数值,一般不定义,但也可定义为 $1/2$ 。从信号处理的角度看,两连续时间信号在有限个孤立时刻上的有限数值差别不会导致信号能量的差异,从而不会导致处理结果的不同。

利用单位阶跃信号的单边特性可以表示各种单边信号,或者组合成其他一些基本信号。例如,一般的单边信号可以表示为 $x(t)u(t)$ ,而单边指数信号则可表示为 $e^{-at}u(t)$ 。再如对于图 1.9(a)的**门信号**(又称**矩形脉冲**),可用 $u(t)$ 表示为

$$G_\tau(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (1.18)$$

如图 1.9(b)所示。

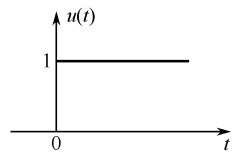


图 1.8 单位阶跃信号

### 1.2.2.2 单位冲激信号 $\delta(t)$

在信号与系统研究中,单位冲激信号 $\delta(t)$ 又称单位冲激函数,是最重要的函数之一。这个函数首先被狄拉克(P. M. Dirac)定义为:

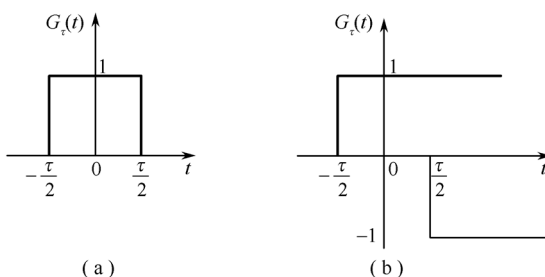


图 1.9 用单位阶跃信号表示一个门信号

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) \rightarrow \infty & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

我们可以用一个其波形如图 1.10(b) 所示的具有单位面积且又高又窄的矩形脉冲来近似描述冲激信号。这个矩形脉冲的宽度是一个非常小的值  $\tau \rightarrow 0$ , 结果, 它的脉冲幅度就是一个非常大的值  $1/\tau \rightarrow \infty$ 。因此, 单位冲激信号可以看作是宽度变成无穷小, 幅度变成无穷大, 而面积一直保持为 1 的一个矩形脉冲。于是, 除  $t = 0$  外, 处处  $\delta(t) = 0$ , 而在  $t = 0$ , 它无定义。为此, 一个单位冲激信号  $\delta(t)$  如图 1.10(a) 所示。



图 1.10 单位冲激信号及其近似表示

在冲激信号的近似中, 也可以用其他的一些脉冲信号来描述, 如指数脉冲、三角脉冲、高斯型脉冲等。单位冲激信号的重要特点并不在它的形状, 而是在它的有效持续期(脉冲宽度)趋于零的同时, 它的面积保持为 1。例如图 1.11(a) 所示的指数脉冲  $\alpha e^{-\alpha t}$ , 随着  $\alpha$  增加会变得越来越窄, 越来越窄, 在极限  $\alpha \rightarrow \infty$  下, 脉冲幅度  $\rightarrow \infty$ , 而其宽度或持续期  $\rightarrow 0$ 。然而, 不管  $\alpha$  值为多少, 这个脉冲下的面积是 1, 因为

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 \quad (1.20)$$

图 1.11(b) 和图 1.11(c) 中的脉冲也有类似的特性。显然, 在实际中真正的冲激信号是不能产生的, 它仅仅能够被趋近得到。

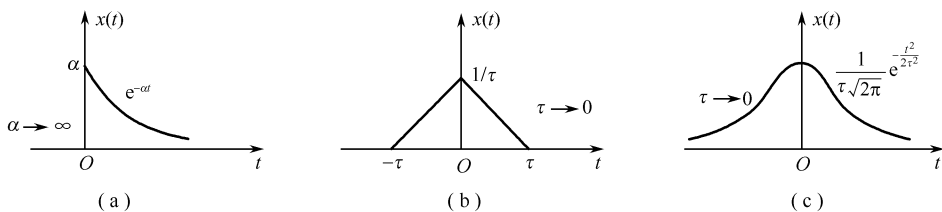


图 1.11 单位冲激信号的其他近似表示

从式(1.19)可得当  $t \neq 0$  时,  $A\delta(t) = 0$  ( $A$  为实数), 而  $t = 0$  时, 它的面积是  $A$ 。因此,  $A\delta(t)$  是一个面积(又称强度)为  $A$  的冲激信号。

冲激信号具有如下性质。

### 1. 时移性质

冲激信号的作用可以出现在任意  $t_0$  时刻, 以符号  $\delta(t - t_0)$  表示, 其波形如图 1.12 所示, 其表达式为

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \delta(t - t_0) \rightarrow \infty & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (1.21)$$

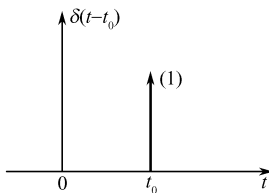


图 1.12 时移的单位冲激信号

### 2. 筛选特性

考虑当单位冲激函数  $\delta(t)$  与一个在  $t = 0$  已经是连续的函数  $x(t)$  相乘会产生什么结果。因为该冲激函数仅在  $t = 0$  有非零值, 而  $x(t)$  在  $t = 0$  的值是  $x(0)$ , 所以可得

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (1.22)$$

据此, 一个连续时间函数  $x(t)$  与一个位于  $t = 0$  的单位冲激函数相乘产生一个冲激, 该冲激产生在  $t = 0$ , 面积为  $x(0)$  [即冲激出现处  $x(t)$  的值]。利用完全相同的证明可将这一结果推广到: 只要  $x(t)$  在  $t = t_0$  连续,  $x(t)$  乘以  $\delta(t - t_0)$  (冲激出现在  $t = t_0$ ) 产生位于  $t = t_0$ , 面积为  $x(t_0)$  [ $x(t)$  在冲激发生处的值] 的一个冲激, 即

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (1.23)$$

### 3. 抽样特性

从式(1.22)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (1.24)$$

只要  $x(t)$  在  $t = 0$  连续。这一结果意味着: 一个函数与冲激  $\delta(t)$  乘积下的面积等于那个函数在单位冲激所在时刻的值。这个性质非常重要, 也很有用, 把它称为单位冲激信号的抽样特性。

从式(1.23)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (1.25)$$

式(1.25)是抽样特性的另一种形式。冲激  $\delta(t - t_0)$  位于  $t = t_0$  时刻发生, 因此, 位于  $x(t)\delta(t - t_0)$  下的面积是  $x(t_0)$ , 这就是  $x(t)$  在冲激时刻  $t = t_0$  的值。在这些推导中都已假设函数  $x(t)$  在冲激所在时刻是连续的。

由式(1.19)给出的单位冲激信号的定义从数学上看是不严谨的。首先, 冲激信号没有定义一个唯一的信号。例如, 可以证明  $\delta(t) + \delta'(t)$  也满足式(1.19); 其次,  $\delta(t)$  甚至不是一个普通意义下的函数。一个普通函数是由对全部时间  $t$  的函数值所表征的, 而冲激函数除  $t = 0$  外, 处处为零, 而就是在这一点, 它的存在范围内的唯一关注的部分却没有定义。将冲激函数定义为广义函数而不是普通函数就能够解决这些问题。一个 广义函数 是用他对其他函数的作用而

不是在每个时刻的值来定义的。

在这种处理方式中,冲激函数用抽样特性定义。我们不必说冲激函数是什么,或者是它看起来像什么,而是通过它对一个测试函数  $\phi(t)$  的作用来定义冲激函数。将一个单位冲激函数定义为这样一个函数,它与某一函数  $\phi(t)$  的乘积下的面积就等于冲激所在时刻函数  $\phi(t)$  的值。假设  $\phi(t)$  在冲激出现时刻是连续的。因此,无论是式(1.24)还是式(1.25)都能用作在这种方式下冲激函数的定义。回想一下,抽样特性是式(1.19)定义的结果,而在广义函数中则用抽样特性定义冲激函数。

运用冲激函数的广义函数定义,讨论一个实际应用问题。因为单位阶跃信号  $u(t)$  在  $t=0$  处不连续,所以在普通函数定义下,在  $t=0$  时,它的导数  $\frac{d}{dt}u(t)$  不存在。现在要说明的是在广义函数意义下,这个导数存在,而且它就是  $\delta(t)$ 。作为证明可以求一下  $\frac{d}{dt}u(t) \cdot \phi(t)$  的积分,利用分部积分有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}u(t) \cdot \phi(t) dt &= u(t)\phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \phi'(t) dt \\ &= \phi(\infty) - 0 - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt = \phi(\infty) - \phi(t) \Big|_0^{\infty} = \phi(0)\end{aligned}$$

这个结果表明,  $\frac{d}{dt}u(t)$  满足  $\delta(t)$  的抽样特性,因此在广义函数意义下它就是一个冲激信号  $\delta(t)$ ,即

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.26)$$

这样一来就有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (1.27)$$

这些结果也能从图1.10(b)中用图解方法得到。从图1.10(b)中可以看出,若  $t < -\tau/2$ ,则从  $-\infty$  到  $t$ ,  $\delta(t)$  在  $\tau \rightarrow 0$  极限形式下的面积是零;若  $t > -\tau/2$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ,其面积为1,即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = u(t) \quad (1.28)$$

这个结果表明:一方面,通过积分,单位冲激信号可以得到单位阶跃信号。同样通过积分,单位阶跃信号可以得到单位斜波信号  $tu(t)$ ,可以一直做下去。另一方面,也能通过微分由冲激函数派生出高阶冲激信号(见习题1.2-4)。所有从单位冲激信号导出的这些信号(连续求导和积分)统称为奇异信号。

### 1.2.3 离散时间单位样值信号和单位阶跃信号

#### 1.2.3.1 单位样值信号 $\delta(n)$

离散时间中对应连续时间冲激信号  $\delta(t)$  的信号是  $\delta(n)$ ,其定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

这个信号也称为**单位脉冲序列**或**单位冲激序列**,如图 1.13(a) 所示。图 1.13(b) 中画出单位样值信号平移  $k$  个单位。与其连续时间中的对应信号  $\delta(t)$  不同,  $\delta(n)$  信号很简单,只是用普通函数描述的。

利用  $\delta(n)$  与  $\delta(n-k)$  可以定义任意离散信号  $x(n)$ 。例如,图 1.14 所示离散信号  $x(n)$  的图形可以表示为

$$x(n) = 2\delta(n+2) - \delta(n+1) + 3\delta(n) - \delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

或写成

$$x(n) = x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2)$$

其中  $x(-2) = 2, x(-1) = -1, x(0) = 3, x(1) = -1, x(2) = 2$ 。

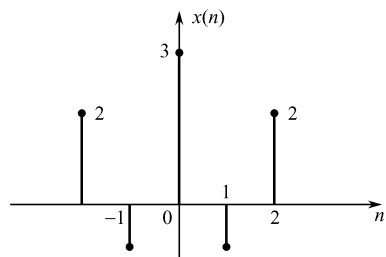
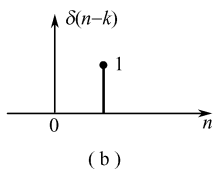
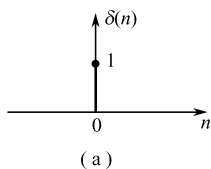


图 1.13 单位样值信号与其移位信号

图 1.14 任意离散信号

由此可见对于一个任意信号  $x(n)$  可利用  $\delta(n)$  与  $\delta(n-k)$  表示为

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.30)$$

式(1.30) 是一个重要的关系式,在以后章节中还会对该式作进一步讨论。

### 1.2.3.2 单位阶跃序列 $u(n)$

离散时间中对应于单位阶跃信号  $u(t)$  的信号为  $u(n)$ ,其定义为

$$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \text{ 的整数} \\ 1 & n \geq 0 \text{ 的整数} \end{cases} \quad (1.31)$$

如图 1.15(a) 所示。图 1.15(b) 中画出平移  $k$  个单位的单位阶跃序列  $u(n-k)$ 。 $u(n)$  类似于连续信号  $u(t)$ ,但应注意  $u(n)$  在  $n=0$  时明确取值为 1。

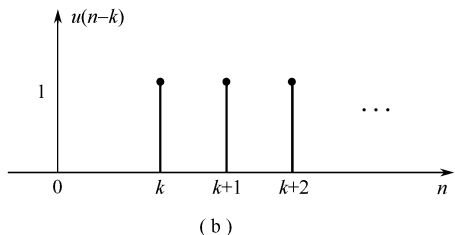
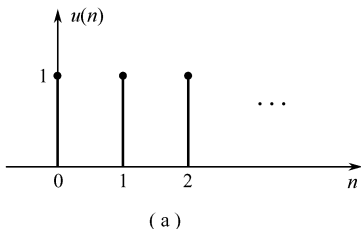


图 1.15 单位阶跃序列与其移位信号

观察  $\delta(n)$  序列与  $u(n)$  序列的定义式,可以看出两者之间存在如下的关系:

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots \quad (1.32)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.33)$$

同样单位阶跃序列  $u(n)$  也具有单边特性,利用这一特性也可表示各种单边序列,或者组合成其他一些基本序列。例如,一般的单边序列可以表示为  $x(n)u(n)$ ;图 1.16 所示的常用门序列(又称矩形序列或窗函数),可用  $u(n)$  表示为

$$G_4(n) = u(n) - u(n-4) \quad (1.34)$$

在连续时间系统中,单位冲激信号  $\delta(t)$  与单位阶跃信号  $u(t)$  之间的关系是用微 / 积分关系来描述的,而在离散系统中,单位样值信号  $\delta(n)$  与单位阶跃序列  $u(n)$  之间的关系是用差分 / 累加关系来描述的。

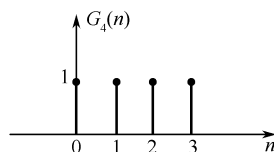


图 1.16 用阶跃序列表示的门序列

### 1.2.4 离散时间复指数信号

离散时间指数信号可表示为

$$x(n) = z^n \quad (1.35)$$

其中  $z$  为复数。式(1.35)也可用极坐标表示,即  $z^n = (re^{j\Omega})^n$ ,  $r$  为模,  $\Omega$  为辐角。离散时间指数信号  $z^n$  与连续时间指数  $e^{st}$  相对应,两者之间的对应关系为

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t}$$

令  $t = nT$  有

$$e^{(\sigma + j\omega)nT} = e^{(\sigma T + j\omega T)n} = e^{\sigma T n} e^{j\omega T n}$$

而  $z^n = (re^{j\Omega})^n = r^n e^{j\Omega n}$ , 故可得

$$r = e^{\sigma T} \quad \Omega = \omega T \quad (1.36)$$

对于每一个复数  $z$ , 都唯一对应复平面(实部为横轴,虚部为纵轴)上一点,该复平面又称为  $z$  平面,由式(1.36)可得  $s$  平面与  $z$  平面有如下的映射关系:

(1)  $s$  平面的虚轴( $\sigma = 0, s = j\omega$ )映射到  $z$  平面上,是一个单位圆,  $|z| = r = 1$ 。显然由于  $\sigma = 0, |z| = r = e^{0T} = 1$ , 而  $\Omega$  是任意的。

(2)  $s$  平面的左半开平面(不含虚轴),即  $\text{Re}[s] = \sigma < 0$ , 映射到  $z$  平面是单位圆内。显然由于  $\sigma < 0, |z| = r = e^{\sigma T} < 1$ , 而  $\Omega$  是任意的。

(3)  $s$  平面的右半开平面(不含虚轴),即  $\text{Re}[s] = \sigma > 0$ , 映射到  $z$  平面是单位圆外。

(4)  $s$  平面的实轴,即  $\omega = 0, s = \sigma$ , 映射到  $z$  平面是正实轴。显然由于  $\omega = 0, \Omega = 2k\pi$ , 而  $|z| = r = e^{\sigma T}$ ,  $\sigma$  变化  $z$  沿正实轴变化。

(5)  $s$  平面的原点,即  $\sigma = 0, \omega = 0$ , 映射到  $z$  平面是  $z = 1$ 。

(6) 从  $z$  平面到  $s$  平面的变换是一个多值变换。在  $z$  平面上的一个已知点,相应于在  $s$  平面上无限多点,在  $s$  平面  $\omega$  从  $-\pi/T$  增长到  $\pi/T$ ,则在  $z$  平面中  $\Omega$  从  $-\pi$  增长到  $+\pi$ ,即辐角旋转一周映射了整个  $z$  平面。所以每当  $\omega$  增加  $\omega_s = 2\pi/T$ , ( $\sigma$  是任意的),在  $z$  平面中  $\Omega$  就相应增加  $2\pi$ ,也即重复旋转一周,  $z$  平面重叠一次。这种多值函数的映射关系,可以想象为将  $s$  平面裁成一条条宽为  $\omega_s$  的“横带”,这些横带相互重叠地映射到整个  $z$  平面。例如在  $z$  平面  $z = 1$  这一点,由于

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j(\omega \pm \frac{2k\pi}{T})T} = 1, k \text{ 为整数}$$

则在  $s$  平面上,  $\sigma = 0, \omega = \pm \frac{2k\pi}{T}$  都满足  $z = 1$ 。



图 1.17 示出了  $s$  平面与  $z$  平面之间的映射关系。当  $z$  取不同值时可由  $z^n$  派生出离散时间实指数信号和离散时间正弦信号等。

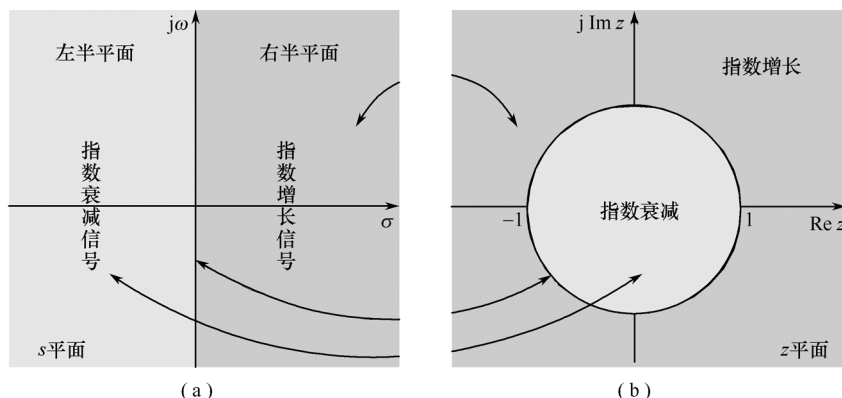


图 1.17  $s$  平面、 $z$  平面及它们之间的映射

#### 1.2.4.1 离散时间实指数信号

当  $\Omega = 0$ , 由式(1.35) 可得离散时间实指数信号

$$x(n) = r^n \quad (1.37)$$

式中  $r$  是实数,  $r$  参数对信号波形的影响如图 1.18 所示。当  $|r| > 1$  时, 信号是增长的, 如图 1.18(a) 和(c) 所示; 当  $|r| < 1$  时, 信号是衰减的, 如图 1.18(b) 和(d) 所示; 当  $r < 0$  时, 信号交替改变正负值( $n$  为偶数时为正,  $n$  为奇数时为负), 如图 1.18(c) 和(d) 所示。

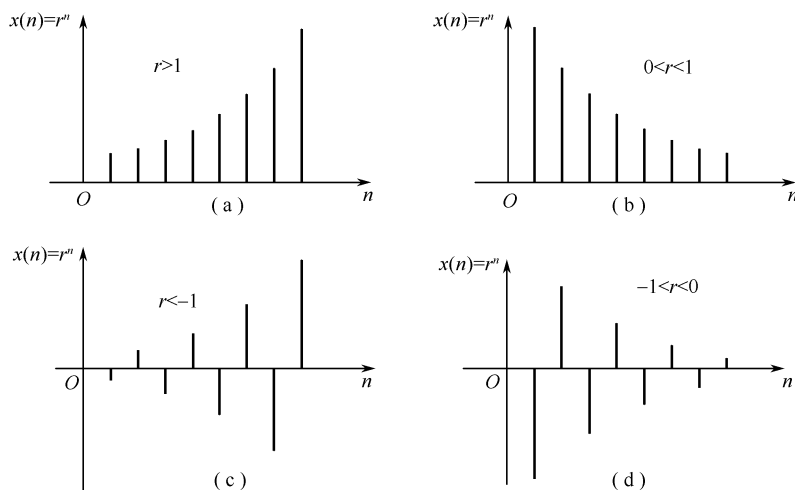


图 1.18 离散时间复指数信号

#### 1.2.4.2 离散时间正弦信号

对式(1.35) 所示的离散时间复指数信号, 取其实部或虚部可得离散时间正弦信号。离散时间正弦信号的一般形式为

$$x(n) = A \cos(\Omega n + \theta) \quad (1.38)$$

式中  $A$  为幅度,  $\theta$  是以弧度值表示的相位。同样,  $\Omega$  是角度的弧度值。因此  $\Omega$  的量纲为每样本弧

度。这个正弦也可以表示为

$$A\cos(\Omega n + \theta) = A\cos(2\pi f n + \theta)$$

其中  $f = \Omega/2\pi$ 。因此,离散时间频率  $f$  的量纲为每样本的弧度值  $/2\pi$ ,即等价于每样本的周期数。这就意味,若  $N$  为正弦的周期(样本数/周期),则正弦的频率  $f = 1/N$ (周期数/每样本)。

图 1.19 示出了一个离散时间正弦信号  $\cos(n\pi/4)$ 。此时,角频率  $\Omega = \pi/4$  弧度/每样本,或者  $f = 1/8$  周期数/每样本,也就是说,正弦的一个周期中有 8 个样本。

对一个连续时间正弦抽样可得到离散时间正弦。例如对一个连续时间正弦  $\cos\omega t$  每隔  $T$  秒抽样得到一个离散时间序列,它的第  $n$  个序列( $t = nT$ )是  $\cos\omega nT$ 。因此,抽样所得信号  $x(n)$  给出为

$$x(n) = \cos\omega nT = \cos\Omega n$$

式中  $\Omega = \omega T$ 。

从上面讨论看,离散时间正弦似乎与连续时间正弦并无异样。然而,离散时间正弦的一些性质确与连续时间正弦十分不同。例如,并不是所有离散时间正弦信号都是周期的;一个正弦  $\cos\Omega n$  仅当  $\Omega$  是  $2\pi$  的有理数倍时才是周期的。另外,离散时间正弦带宽限制于  $\Omega = \pi$ 。任何  $\Omega \geq \pi$  的正弦总可以表示为某个角频率  $\Omega \leq \pi$  的正弦,这些特殊的性质直接来自离散时间正弦的周期必须是整数这一事实。这个问题在第 7 章还将进一步讨论。

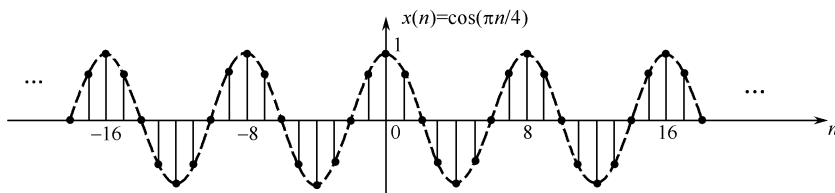


图 1.19 离散时间正弦信号

### 1.3 信号时域运算

当对信号进行合成、抽样、调制等处理时,往往需要进行信号运算,它包括信号的翻转、展缩、平移、微分、积分,以及信号的相加或相乘。某些物理器件可直接实现这些功能,例如,加法器可对几个同时输入的信号进行相加运算;微分器和积分器是分别对信号进行微分和积分运算的器件。然而对于一些信号的复杂处理,实际上是上述基本运算的综合结果,因此,我们有必要熟悉在运算过程中信号解析表达式对应的波形变化,并初步了解这些运算的物理背景。

信号的基本运算可大致分为两类:一类是直接对信号进行加、乘、微分、积分等数学运算;另一类是对信号中的自变量进行置换。在信号与系统分析中,后一类运算有着重要的应用价值,本书重点讨论这一类信号运算。

#### 1.3.1 信号的和、积运算

信号和与积运算是指信号相加与相乘。这类运算较为简单。需要注意的是,必须将同一瞬间的两个函数值相加或相乘。

信号的和与积运算有着实在的物理意义。在图 1.20 中,将  $x(t)$  视为缓慢波动的信道噪声,

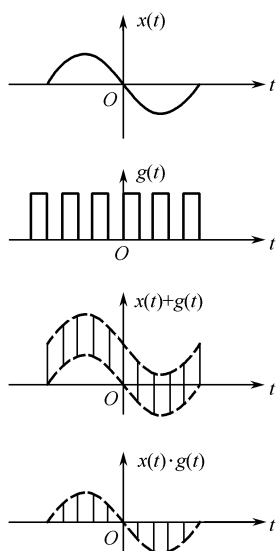


图 1.20 信号的相乘与相加

$g(t)$  视为要传输的数字信号, 则  $x(t) + g(t)$  表示了实际发送的数字信号,  $x(t) \cdot g(t)$  表示了信道噪声  $x(t)$  的抽样输出信号。

利用和运算, 可以将一些复杂的信号化为有限或无限个简单信号的加权组合, 从而便于处理和分析。应用乘运算, 可以将一个信号分解成若干因子的乘积。

【例 1.3.1】 (1)  $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} = |t| \cdot \frac{1}{t}$

(2)  $n \left( \frac{1}{2} \right)^n u(n) = [nu(n)] \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n u(n) \right]$

(3)  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$

(4)  $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$

### 1.3.2 信号的积分与微分运算

对连续时间信号  $x(t)$  的积分运算  $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$  [记作  $x^{(-1)}(t)$ ] 产生另一个连续时间信号, 它在任意时刻  $t$  的取值是从  $-\infty \sim t$  时间内  $x(t)$  的波形图与时间轴所包围的面积。

对连续时间信号  $x(t)$  的微分运算  $\frac{d}{dt}x(t)$  [记作  $x'(t)$ ] 也是一个连续时间信号, 表示信号随时间的变化率。图 1.12(a)、(b) 分别画出了两个信号的积分和微分波形。

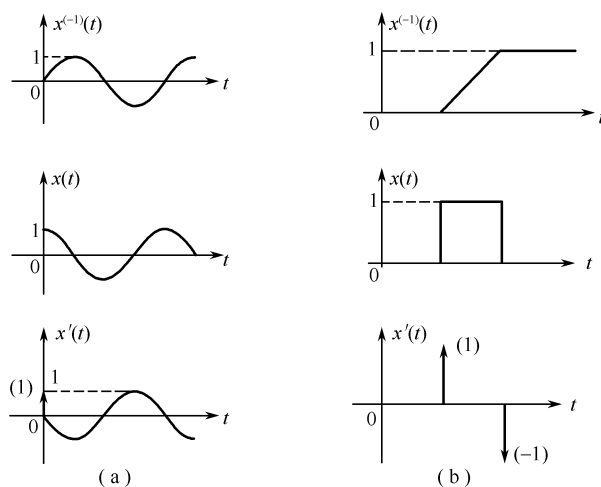


图 1.21 信号的积分与微分

由于引入了奇异信号的概念, 不仅普通连续时间信号可以微分, 具有第一类间断点的信号也可以微分, 它们在间断点的一阶微分是一个冲激, 面积为原信号在该时刻的跃变增量, 而它们在其他连续区间的微分就是常规意义上的导数。

【例 1.3.2】求如图 1.22(a) 所示信号  $x(t)$  的微分信号。

$$x(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

解: 由于  $t = 1$  是  $x(t)$  的间断点, 故  $x'(t)$  在  $t = 1$  处应出现一个冲激, 由于  $x(1^-) = 1$ ,  $x(1^+) = 0$ , 冲激的面积为  $x(1^+) - x(1^-) = -1$ , 因此有

$$x'(t) = g(t) - \delta(t - 1)$$

波形图如图 1.22(b) 所示。

其中

$$g(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在离散信号中, 对应于微积分运算的是离散信号的差分与求和, 这两种运算的定义分别为

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (1.39)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (1.40)$$

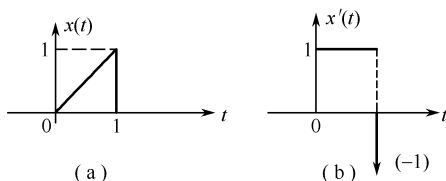


图 1.22 例 1.3.2 的波形图

同连续信号中微分和积分的关系一样, 只有当  $x(n)$  在  $n = -\infty$  等于 0 时, 差分运算与求和运算才互为逆运算。例如, 序列  $u(n)$  与  $\delta(n)$  之间的差分、求和运算就是一对逆运算, 即

$$\delta(n) = \nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

上述两关系式在 1.2.3 节已证明, 可参阅。

### 1.3.3 信号波形的翻转、展缩与平移

在变换、分析等信号处理中, 常用到三种信号运算: 平移、展缩和翻转。因为在我们的信号描述中自变量是时间, 所以讨论的这些运算又称为时移、时间展缩和时间翻转。不过, 这节讨论的结论对于不是以时间为自变量(如频率)的函数也同样成立。

#### 1.3.3.1 时移

信号的时移运算就是将信号  $x(t)$  转换为  $x(t+T)$  的过程, 即  $x(t) \rightarrow x(t+T)$ 。信号可以沿时间轴左移或右移。当  $T > 0$  时, 信号波形图左移; 当  $T < 0$  时, 信号波形图右移。

【例 1.3.3】试画出图 1.23(a) 所示信号  $x(t) = e^{-5t}$  延时 1 秒及超前 1 秒的波形图。

解: 根据信号的时移运算, 延时 1 秒, 即可将原信号  $x(t)$  向右移 1 秒, 得  $x(t-1)$ , 波形图如图 1.23(b) 所示; 超前 1 秒, 即可将原信号  $x(t)$  向左移 1 秒, 得  $x(t+1)$ , 波形图如图 1.23(c) 所示。

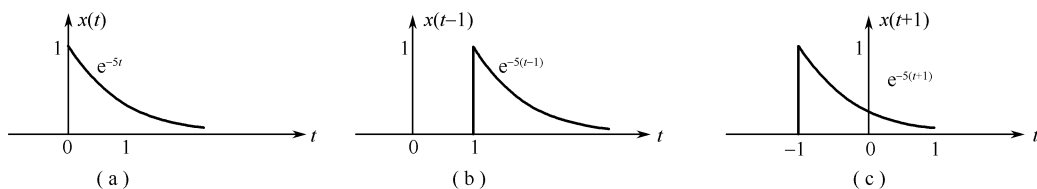


图 1.23 例 1.3.3 的波形图

### 1.3.3.2 时间展缩

信号时间展缩运算(又称为时间尺度变换)就是将信号  $x(t)$  转换成新的信号  $x(at)$ , 即  $x(t) \rightarrow x(at)$ , 其中  $a$  为不为零的实数, 称为展缩系数。若  $|a| > 1$ , 则将  $x(t)$  的波形压缩到  $1/|a|$  倍, 即得到  $x(at)$  的波形; 若  $|a| < 1$ , 则将  $x(t)$  的波形扩展到  $1/|a|$  倍, 即得到  $x(at)$  的波形。

**【例 1.3.4】** 试画出图 1.24(a) 所示信号  $x(t)$  的展/缩信号  $x(2t)$  和  $x(t/2)$  的波形图。

**解:** 以新的自变量  $2t$  代替  $x(t)$  中的变量, 此时展缩系数  $a = 2$ , 因此所得  $x(2t)$  的波形图是将原信号  $x(t)$  波形沿时间轴  $t$  压缩  $1/2$  倍, 如图 1.24(b) 所示; 同理, 以新的自变量  $t/2$  代替  $x(t)$  中的变量, 此时展缩系数  $a = 1/2$ , 因此所得  $x(t/2)$  的波形图是将原信号  $x(t)$  波形沿时间轴  $t$  扩展 2 倍, 如图 1.24(c) 所示。

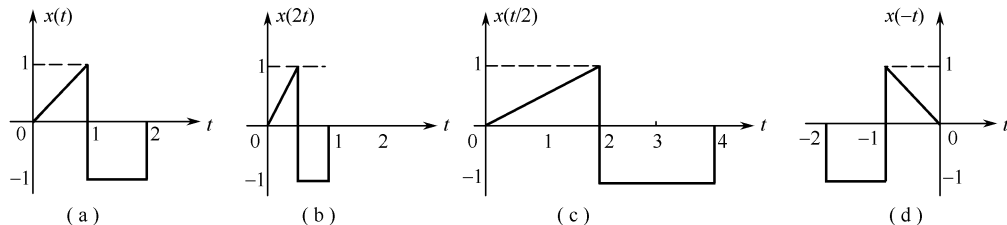


图 1.24 例 1.3.4 的波形图

### 1.3.3.3 时间翻转

信号翻转运算就是将信号  $x(t)$  转换成新的信号  $x(-t)$  的过程, 或者说是信号展缩运算  $x(at)$  中  $a = -1$  时的特例。其实质就是将原信号  $x(t)$  的波形相对于纵轴作翻转。图 1.24(a) 中  $x(t)$  翻转后的  $x(-t)$  波形如图 1.24(d) 所示。

以上讨论的都是信号基本单元运算。在有些复杂的运算中需要同时应用几种基本运算。涉及全部三种基本单元运算的最一般运算是  $x(at + b)$ 。在同时含有信号的多种运算时, 与信号基本运算顺序无关, 每一步骤只参与一种基本运算, 逐步完成。

**【例 1.3.5】** 已知  $x(t)$  的波形如图 1.25(a) 所示, 试画出  $x(3 - 2t)$  的波形图。

**解:** 本例题包含信号的三种基本运算, 在这三种运算中可以看到最终结果将与运算先后顺序无关。下面将采用两种不同运算过程进行讨论。

第一种情况: 由  $x(t) \rightarrow x(2t) \rightarrow x(-2t) \rightarrow x(3 - 2t)$ , 即对原信号先进行压缩, 再进行翻转和右移, 结果分别如图 1.25(b)、(c) 和 (d) 所示。

$$x(t) \xrightarrow{\text{波形压缩为 } 1/2} x(2t) \xrightarrow{\text{波形翻转}} x(-2t) \xrightarrow{\text{波形右移 } 3/2} x(3-2t)$$

第二种情况:由  $x(t) \rightarrow x(t-3) \rightarrow x(2t-3) \rightarrow x(3-2t)$ , 即对原信号先进行右移, 再进行压缩和翻转, 结果分别如图 1.25(e)、(f) 和 (g) 所示。

显然对信号进行两种不同顺序的操作过程, 并不影响最后的结果, 这说明对信号同时进行多种运算时, 与信号运算顺序无关。

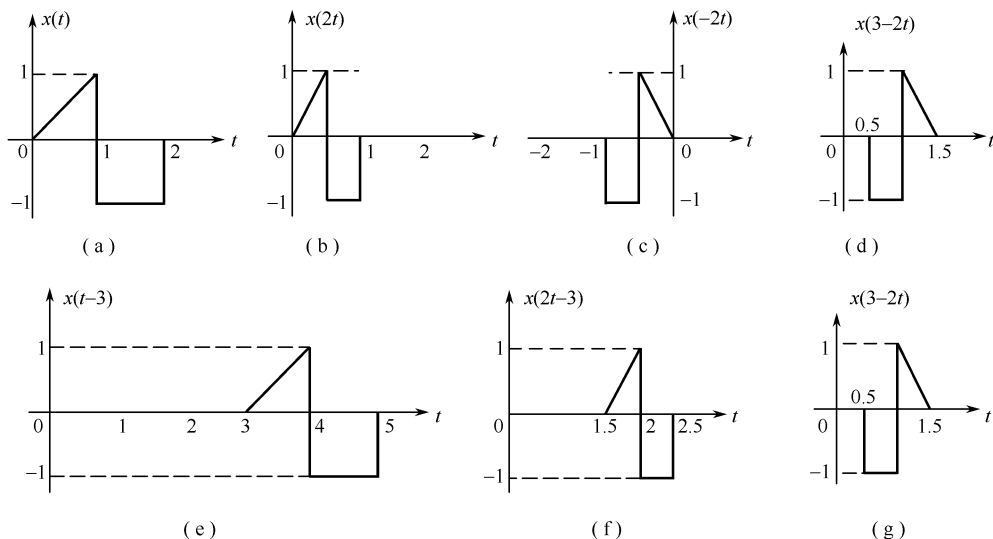


图 1.25 例 1.3.5 的波形图

信号的翻转、展缩与平移同样适用于离散信号, 其中, 翻转和平移的方法与连续信号相同, 而展缩变换确有所不同, 其原因在于离散信号中的自变量  $n$  只能取整数。例如, 在图 1.26 中, 我们分别画出了某一离散信号  $x(n)$  及其经过展缩变换后得到的  $x(2n)$ 、 $x(n/2)$  的波形, 从图上可见, 与连续信号的展缩变换相比,  $x(2n)$  并不是  $x(n)$  经过时间轴压缩 1/2 的结果, 而是从  $x(n)$  中抽取  $n$  为偶数的样点值构成;  $x(n/2)$  也不是  $x(n)$  经过时间轴上扩展 2 倍后的结果, 而是由  $x(n)$  中  $n$  处样点值变成  $2n$  处样点值构成的。一般来讲, 当  $a > 1$  且为整数时,  $x(an)$  是由  $x(n)$  中  $n$  处样点值变成  $2n$  处样点值构成的。一般来讲, 当  $a > 1$  且为整数时,  $x(an)$  是由  $x(n)$  中  $n$  处样点值变成  $2n$  处样点值构成的。一般来讲, 当  $a > 1$  且为整数时,  $x(an)$  是由  $x(n)$  中  $n$  处样点值变成  $2n$  处样点值构成的。一般来讲, 当  $a > 1$  且为整数时,  $x(an)$  是由  $x(n)$  中  $n$  处样点值变成  $2n$  处样点值构成的。

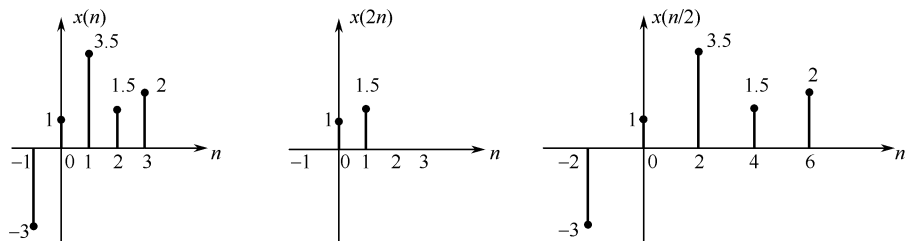


图 1.26  $x(n)$  及其  $x(2n)$  和  $x(n/2)$  的波形

信号的运算和变换不仅存在于时域中, 而且还存在于频域中。更重要的是, 如果某个信号在时域中进行了某种运算或变换, 则这种运算或变换一定会在频域的相应信号中有所反映; 反之亦然, 如果信号在频域中进行了某种运算或变换, 则其在时域中的相应信号也一定会有所反映。关于这方面的内容将在后续章节中详细讨论。

### 1.3.4 信号的分解

在对信号进行分析和处理时,常常将信号分解成基本信号分量之和。这种分解可以按信号的时间函数进行分解,也可以按信号的不同频率进行分解,或按照其他方式进行分解。下面我们讨论信号分解的几种方法。

#### 1.3.4.1 信号分解为奇信号与偶信号之和

一连续信号  $x(t)$  可以分解为偶分量  $x_e(t)$  和奇分量  $x_o(t)$  之和,即

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1.41)$$

由式(1.41)和式(1.9)可得下列关系式:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (1.42)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (1.43)$$

**【例 1.3.6】** 已知信号  $x(t)$  波形如图 1.27(a) 所示,画出  $x_e(t)$  和  $x_o(t)$  的波形图。

**解:** 由式(1.42)和式(1.43)可知,要想求出  $x_e(t)$  和  $x_o(t)$ ,必须先求出信号  $x(t)$  的翻转信号  $x(-t)$ ,如图 1.27(b) 所示,再进一步做  $x(t)$  和  $x(-t)$  代数相加减的运算,即可得,如图 1.27(c)、(d) 所示。

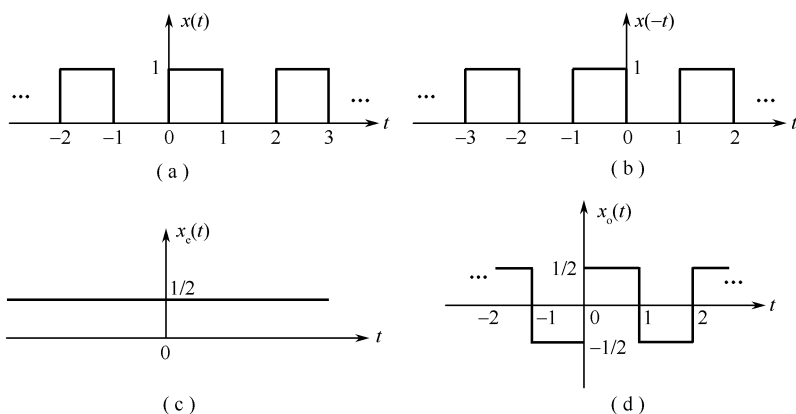


图 1.27 例 1.3.6 的波形图

#### 1.3.4.2 信号分解为基本信号的有限项之和

1.2 节所讨论过的常用信号,在信号分析中有专门的分析研究。若将信号分解成它们的有限项和式,则信号本身的分析结果也就基本清楚了,我们以几个例子来对这种分解情况进行说明。

如图 1.28 所示信号  $x_a(t)$ ,可分解为

$$x_a(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-2)$$

单位三角信号:

$$x_b(t) = \Lambda_2(t) = (t+1)u(t+1) - 2tu(t) + (t-1)u(t-1)$$

单位门信号:

$$G_\tau(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$x_d(t) = 2u(t) - 1$$

$x_d(t)$  又常记为  $\text{sgn}(t)$ , 称为符号函数, 其定义是

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

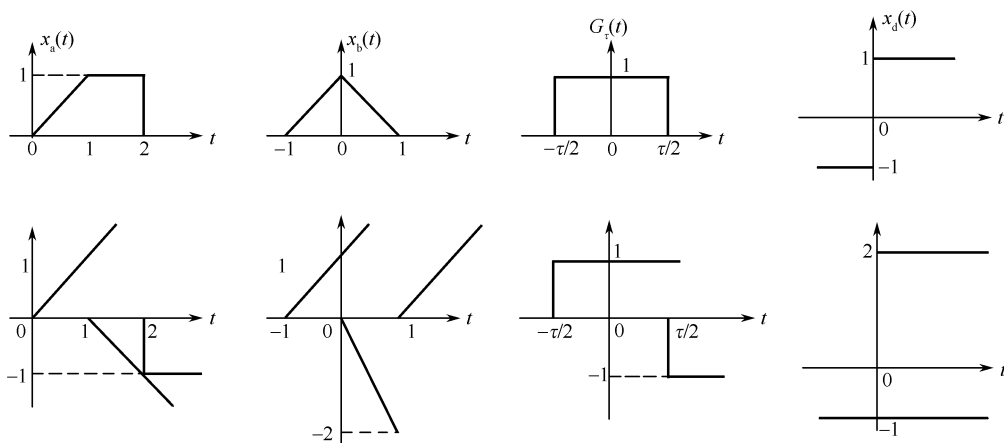


图 1.28 信号分解为有限个典型信号之和

### 1.3.4.3 信号的因子分解

将信号分解成若干因子的乘积, 这在第 3 章中求信号的频谱时会经常用到。由信号的表达式作因子分解是比较容易的, 比如符号函数可以分解成两个信号  $|t|$  和  $1/t$  的积, 即

$$\text{sgn}(t) = |t| \cdot \frac{1}{t}$$

又如

$$te^{-t}u(t) = tu(t) \cdot e^{-t}u(t)$$

$$e^{-t}\sin(t)u(t) = e^{-t}u(t) \cdot \sin(t)$$

等。

图 1.29 示出了对信号的波形图作信号因子分解的例子。

$$x_a(t) = \Lambda_{2\tau}(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$x_b(t) = \Lambda_{2\tau}(t) \cdot P_T(t)$$

其中  $P_T(t)$  表示周期为  $T$  的对称方波串。



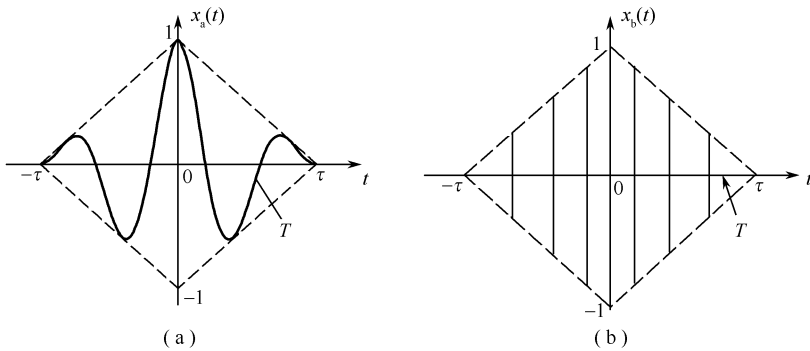
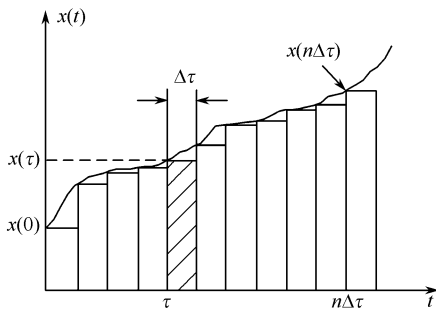


图 1.29 信号的因子分解

#### 1.3.4.4 信号分解成矩形脉冲序列

任一连续信号  $x(t)$  可以分解成一系列矩形窄脉冲,如图 1.30 所示,将时间坐标分成许多相等的时间间隔  $\Delta\tau$ ,则从零时刻起第一个脉冲为  $x(0)[u(t) - u(t - \Delta\tau)]$ ,第二个脉冲为  $x(\Delta\tau)[u(t - \Delta\tau) - u(t - 2\Delta\tau)]$ ,...,将这一系列矩形脉冲相叠加,得

$$\begin{aligned}
 x(t) &\approx \cdots + x(0)[u(t) - u(t - \Delta\tau)] + x(\Delta\tau)[u(t - \Delta\tau) - u(t - 2\Delta\tau)] + \cdots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \{u(t - n\Delta\tau) - u[t - (n+1)\Delta\tau]\} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \frac{u(t - n\Delta\tau) - u[t - (n+1)\Delta\tau]}{\Delta\tau} \Delta\tau
 \end{aligned} \quad (1.45)$$

图 1.30 用矩形脉冲逼近信号  $x(t)$ 

在  $\Delta\tau \rightarrow 0$  的极限情况下,  $\Delta\tau$  变为  $d\tau$ ,  $n\Delta\tau$  变为  $\tau$ , 而式(1.45) 则变成

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau) \Delta\tau$$

即为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.46)$$

式(1.45) 表明,时域里任一信号可近似地分解为一系列矩形窄脉冲之和。式(1.46) 表明,当上述矩形脉冲的脉宽趋于无限小时,信号可分解成无数冲激信号的叠加,这种分解方法在后面几节中还将详细讨论。

#### 1.3.4.5 信号分解成正交信号分量之和

连续信号可分解成一系列正交分量之和。例如,一个对称矩形脉冲信号可以用各次谐波的正弦与余弦信号的叠加来近似表示,如图 1.31 所示。各次谐波的正弦、余弦信号就是此矩形脉冲信号的正交分量。有关信号分解为正交分量的理论方法在第 3 章中详细讨论。

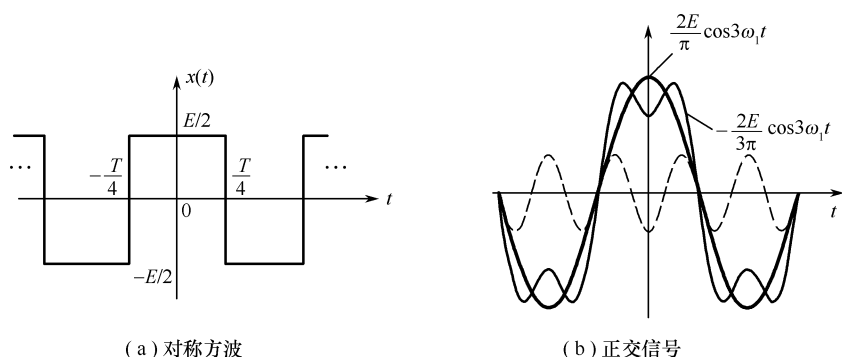


图 1.31 信号分解为一系列正交分量之和

## 1.4 系统及其表示

### 1.4.1 系统

要产生信号,要对信号进行存储、转化、传输和处理,需要一定的物理装置,这样的物理装置称为信号系统,简称系统。因而我们研究的系统可看作信号变换器,对输入信号经过某种变换以后得到输出信号,其目的是消弱信号中的多余内容,滤除噪声和干扰,或者将信号变换成容易分析和识别的形式,便于估计和选择其特征参数。与连续时间信号和离散时间信号相对应,系统也分为连续时间系统和离散时间系统,前者将连续时间输入信号变换为连续时间输出信号;后者将离散时间输入信号变换为离散时间输出信号。本书将分别但并行地讨论这两种系统,以便读者可以借助对一种系统的透彻了解来理解另一种系统。

### 1.4.2 系统的表示

对系统进行表示,就是对系统的输入信号与输出信号间的关系进行表示,这是系统分析的第一步。如果只对系统的端口特性(外部特性)进行分析,可以用一个方框图代表系统,如图 1.32 所示。

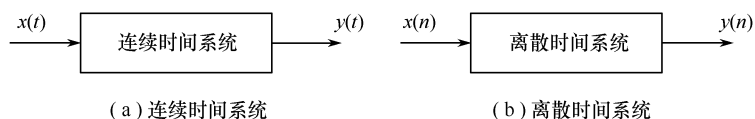


图 1.32 系统方框图

图中  $x(t)$  和  $x(n)$  分别代表连续时间系统和离散时间系统的输入信号(又称激励),  $y(t)$  和  $y(n)$  分别代表连续时间系统和离散时间系统的输出信号(又称响应)。对于单输入 - 单输出系统又可表示为

$$y(t) = T[x(t)] \quad \text{或} \quad y(n) = T[x(n)]$$

其意义是,如果给系统输入信号  $x(t)$  或  $x(n)$  作为激励,系统将输出信号  $y(t)$  或  $y(n)$  作为响应。也可将系统的输入与输出关系用一个箭头表示出来,这是最直观表示方法

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad \text{或} \quad x(n) \rightarrow y(n)$$

以上系统的表示法是系统输入与输出关系的一般表示,并未具体指明系统激励与响应关系究竟怎样,为了进行具体深入地系统分析,常常采用两种方式来表示:数学方程式(微积分方程或代数方程或差分方程)和系统模拟框图来表示。

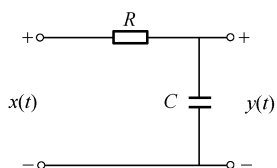


图 1.33 一阶 RC 电路

在电路分析中,曾研究过如图 1.33 所示的一阶 RC 电路,其中  $x(t)$  是激励信号,  $y(t)$  是电容器两端的电压,以此为系统的输出信号。描述该系统的一阶微分方程为

$$RC \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \quad (1.47)$$

电容器和电感器的端口方程都可以用微分或积分形式来表示,因此可用积分器来模拟储能元件。而电阻元件的端点方程是代数形式,因此电阻器可以用倍乘器来模拟。现将系统模拟中常用的几种基本运算器的符号及其运算关系列于图 1.34 中。

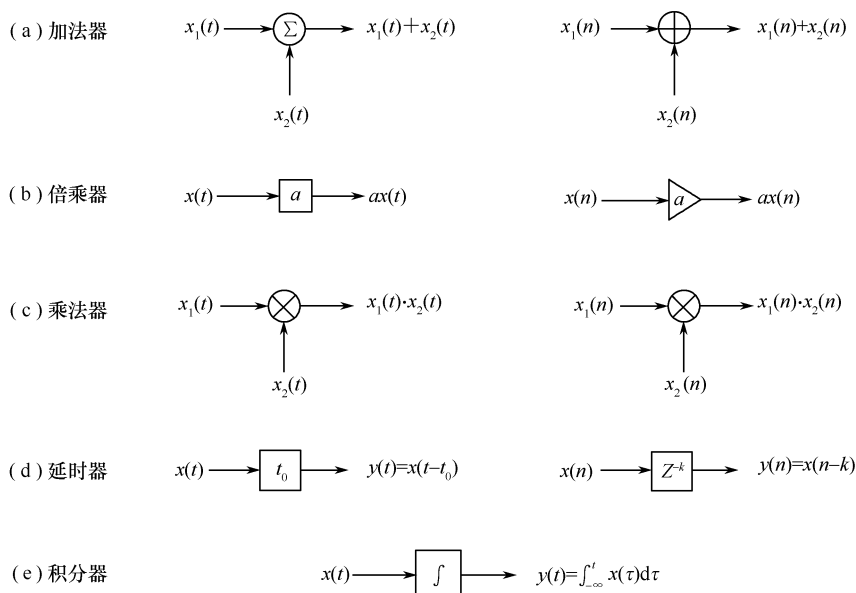


图 1.34 系统模拟的基本运算器

将式(1.47)两边积分得

$$y(t) + \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

经整理得

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t [x(\tau) - y(\tau)] d\tau$$

由上式可画出该系统的模拟框图,如图 1.35 所示。

一个系统往往由若干子系统组成。子系统之间的连接有串连(级联)和并联两种基本形式,如图 1.36 所示。

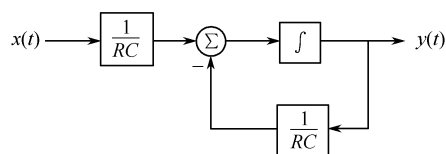
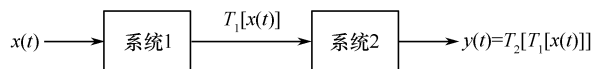
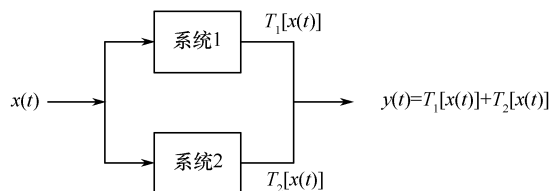


图 1.35 一阶 RC 系统模拟框图



(a) 两个子系统级联



(b) 两个子系统并联

图 1.36 系统连接的两种形式

## 1.5 系统的分类

### 1.5.1 因果与非因果系统

在实际的物理系统中,激励是产生响应的原因,响应是激励引起的后果,这种性质称为系统的因果性。响应不出现在激励之前的系统称为**因果系统**或**物理可实现系统**,否则称为**非因果系统**或**物理不可实现系统**。具体地说,因果系统在任何瞬时的输出响应与未来的输入无关,只与当前或以前时刻的输入有关;非因果系统的响应可以领先于输入,即输出响应还与未来的输入有关。例如,由方程  $y(t) = x(t-1)$  和  $y(n) = x(n) - x(n-1)$  所代表的系统都是因果系统,而由方程  $y(t) = x(t+1)$  和  $y(n) = x(n) - x(n+1)$  所代表的系统都是非因果系统。

一般而言,实际运行的系统都是因果系统,不满足因果规律的非因果系统在实际中是不存在的,但对它的研究有理论意义。

### 1.5.2 连续与离散系统

**连续时间系统**是指激励和响应都是连续时间变量  $t$  的函数,即能够将一种连续信号转换成另一种连续信号的数学模型。这种数学模型就是微分方程,如模拟通信系统。

**离散时间系统**是指激励和响应都是离散时间变量  $n$  的函数,即能够将一种离散信号转换成另一种离散信号的数学模型。而这种数学模型就是差分方程,如数字计算机系统。

对于连续系统和离散系统,在分析方法和分析思路方面,有很多类似可比之处,故在学习中采用对照两种系统的学习方法有利于记忆和理解。

### 1.5.3 有记忆系统与无记忆系统

如果系统的输出只与当前时刻的输入有关,系统就称为无记忆系统。纯电阻电路就是一个无记忆系统,又称即时系统。

如果系统的输出不仅与当前时刻的输入有关,而且还与它过去的工作状态有关,系统就称为有记忆系统,又称动态系统。含有记忆元件(电容器、电感、磁芯、寄存器、存储器等)的系统都是有记忆系统。

例如方程  $y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$  和  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$  代表的系统都是有记忆系统。有记忆系统的数学模型是微分方程或差分方程。

### 1.5.4 时不变系统与时变系统

时不变系统的参数不随时间而变化。描述这种系统的数学模型是常系数微分方程或常系数差分方程。

时不变系统有一个很重要的特性,它能对于一个有时移的输入信号,产生一个与之相应的时移输出信号,即

$$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \quad (1.48)$$

或

$$x(n - n_0) \rightarrow y(n - n_0) \quad (1.49)$$

其中  $t_0, n_0$  是实常数,可正可负。

由此可知,只要初始状态不变,时不变系统的响应形式仅取决于输入信号形式,而与输入信号的时间起点无关。图 1.37 是一个时不变连续系统的示意图。

时不变系统的另一特性是描述其系统的参数不随时间而变化。例如图 1.38 所示系统,电阻  $R(t)$  是时变电阻,输入信号为电压源  $x(t)$ ,输出为回路电流  $i(t)$ ,该系统可用下列微分方程来描述该系统,即

$$L \frac{di(t)}{dt} + R(t)i(t) = x(t) \quad (1.50)$$

式(1.50)清楚地表明了时变系统的数学模型是变系数微分方程。因而对于时不变系统可用常系数微分方程来描述。

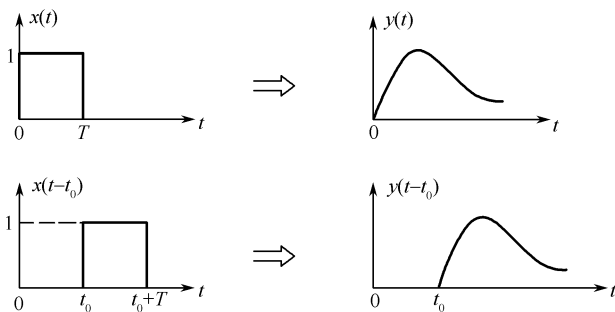


图 1.37 时不变连续系统示意图

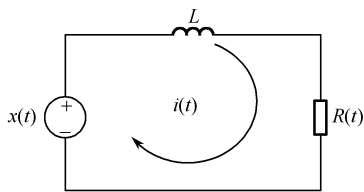


图 1.38 时变系统

同样,对时不变离散系统可用常系数差分方程来描述。

### 1.5.5 线性与非线性系统

设某系统的激励  $x(t)$  与其响应  $y(t)$  之间关系表示为

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

如果激励增大  $a$  倍,则其响应也增大  $a$  倍,即

$$ax(t) \rightarrow ay(t) \quad (1.51)$$

式(1.51)说明系统满足齐次性。

如果  $x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$   
则

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad (1.52)$$

式(1.52)说明系统满足可加性。

由式(1.51)和式(1.52)可以定义:既满足齐次性又满足可加性的系统称为线性系统,即如果

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

则

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \quad (1.53)$$

式中  $a_1, a_2$  为任意实常数。

类似的,对离散时间系统,线性性质的定义为

如果  $x_1(n) \rightarrow y_1(n), x_2(n) \rightarrow y_2(n)$   
则

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \rightarrow a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \quad (1.54)$$

式中,  $a_1, a_2$  为任意实常数。

具有上述线性性质的系统称为线性系统。否则,称为非线性系统。

对于动态系统,其响应不仅决定于系统的激励  $x(t)$ ,而且与系统的初始状态  $y(t_0)$  有关。可以将初始状态看作是系统的另一种激励。这样,根据线性性质,线性系统的响应可理解外加输入信号  $x(t)$  与初始状态  $y(t_0)$  单独作用所引起的响应之和。

若令外加输入信号为零,由初始状态  $y(t_0)$  引起的响应,称为零输入响应,记作  $y_{zi}(t)$ ,即

$$y(t_0), x(t) = 0 \rightarrow y_{zi}(t) \quad (1.55)$$

若令初始状态为零,由外加输入信号  $x(t)$  引起的响应,称为零状态响应,记作  $y_{zs}(t)$ ,即

$$y(t_0) = 0, x(t) \rightarrow y_{zs}(t) \quad (1.56)$$

若系统的响应是由外加输入信号  $x(t)$  和初始状态  $y(t_0)$  共同作用产生的,称为系统的全响应,记作  $y(t)$ ,即

$$y(t_0), x(t) \rightarrow y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (1.57)$$

线性系统这一性质,即可以把由初始状态和外加输入信号引起的响应分开,可称为**分解特性**。单凭分解特性还不足以判断系统是线性系统,因为当系统具有多个输入信号或多个初始状态时,它必须满足对所有的输入信号和初始状态分别呈现线性性质。

故此,**线性系统**可定义为:**凡是具有分解性、零输入响应线性和零状态响应线性的系统就称为线性系统。线性系统的三个条件缺一不可,否则系统就是非线性系统。**对于离散系统,同样有上述结论成立。

**【例 1.5.1】** 判断下述方程所表示系统中哪些是线性系统?(其中  $x(t)$  和  $x(n)$  代表系统输入,  $y(0)$  代表系统唯一的初始状态,  $y(t)$  和  $y(n)$  代表系统输出。)

$$(1) y(t) = y(0) + x(t) + y(0)x(t)$$

$$(2) y(t) = y^2(0) + x(t)$$

$$(3) y(t) = y(0) + |x(t)|$$

$$(4) y(t) = 2y(0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$(5) y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

$$(6) y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$

**解:**按照线性系统的定义,方程(4)、(5)、(6)所表示的系统是线性系统。而方程(1)、(2)、(3)所表示的系统分别不具有分解性、零输入响应线性、零状态响应线性,从而都是非线性系统。

**【例 1.5.2】** 已知一线性连续时间系统,当输入  $x(t)$  为零,初始状态  $y(0) = 5$  时,系统响应为  $5e^{-2t}$ ,在  $y(0) = 10$  和  $x(t)$  的共同作用下,系统全响应为  $y(t) = 1 + 9e^{-2t}$ 。求  $y(0) = 25$  和  $2x(t)$  共同作用下的系统全响应。

**解:**已知  $x(t) = 0, y(0) = 5 \rightarrow 5e^{-2t}$ ,根据系统的线性性质,有

$$x(t) = 0, y(0) = 10 \rightarrow 10e^{-2t}, x(t) = 0, y(0) = 25 \rightarrow 25e^{-2t}$$

而

$$x(t), y(0) = 10 \rightarrow 1 + 9e^{-2t}$$

$$\text{由系统线性性质,有 } x(t), y(0) = 0 \rightarrow 1 + 9e^{-2t} - 10e^{-2t} = 1 - e^{-2t}$$

从而有

$$2x(t), y(0) = 0 \rightarrow 2 - 2e^{-2t}$$

于是

$$2x(t), y(0) = 25 \rightarrow 2 + 23e^{-2t}$$

即  $y(0) = 25$  和  $2x(t)$  共同作用系统产生的全响应为  $2 + 23e^{-2t}$ 。

**【例 1.5.3】** 判断下列系统是否为线性时不变系统:

$$(1) y(t) = \cos[x(t)]$$

$$(2) y(t) = nx(n)$$

**解:** (1) 设输入信号分别为  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ , 相应的输出为  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$ , 则

$$y_1(t) = T[x_1(t)] = \cos[x_1(t)], y_2(t) = T[x_2(t)] = \cos[x_2(t)]$$

当输入为  $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  时, 相应的输出为

$$y_3(t) = T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \cos[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \neq \cos[\alpha x_1(t)] + \cos[\beta x_2(t)]$$

即  $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$ , 故该系统为非线性系统。

又设输入延时  $t_0$ , 则相应输出为  $y(t) = \cos[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$ , 故该系统为时不变系统。

(2) 同理, 根据系统的线性性质可判断  $y(n) = nx(n)$  为线性系统。

根据时不变系统的特性有

$$x(n - n_0) \rightarrow nx(n - n_0) \neq (n - n_0)x(n - n_0) = y(n - n_0)$$

故该系统为时变系统。

### 1.5.6 其他的系统分类

按照研究角度的不同, 对于系统还可作出其他多种分类。比如: 输入输出都可以用确定性信号表示的系统称为确定性系统, 而输入输出都必须用随机信号来描述的系统称为不确定系统或随机系统。系统对任何一个有界输入, 其系统的输出也有界, 该系统为**稳定系统**; 反之, 如果系统的输入有界, 输出无界, 则系统称为**不稳定系统**。

本书主要讨论**线性时不变**(Linear Time-Invariant, 记作 **LTI**) 系统, 对于这类系统的因果性和稳定性可利用系统的冲激响应和系统函数来判断, 这些内容在后续章节中将详细讨论。

## 习 题 一

1.1-1 试判断下面每一种说法对与错, 若为错, 用证明或例子说明。

- (1) 两个周期信号之和总是周期信号;
- (2) 所有非周期信号都是能量信号;
- (3) 所有能量信号都是非周期信号;
- (4) 若一个信号不是能量信号, 那么它就一定是功率信号, 反之亦然;
- (5) 两个功率信号之积总是一个功率信号;
- (6) 一个能量信号和一个功率信号之积总是一个能量信号。

1.1-2 说明下列信号哪些是周期信号, 哪些是非周期信号; 哪些是能量信号, 哪些是功率信号。计算它们的能量和平均功率。

$$(1) x(t) = \begin{cases} 5\cos(10\pi t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$(2) x(t) = \begin{cases} 8e^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$(3) x(t) = 5\sin 2\pi t + 10\sin 3\pi t, -\infty < t < \infty$$

1.1-3 判断下列序列是否是周期的, 如果是周期的, 试确定其基本周期。

$$(1) \cos(0.5\pi n + 0.2) \quad (2) \cos(\sqrt{2}\pi n + 1.2)$$

$$(3) \sin\left(0.5n + \frac{\pi}{3}\right) \quad (4) e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

1.1-4 试证明:

- (1) 两个奇信号或两个偶信号的乘积是一个偶信号。



(2) 一个奇信号和一个偶信号的乘积是一个奇信号。

1.2-1 画出下列信号的波形图,注意它们的区别。

$$(1) x_1(t) = tu(t)$$

$$(2) x_2(t) = (t-1)u(t)$$

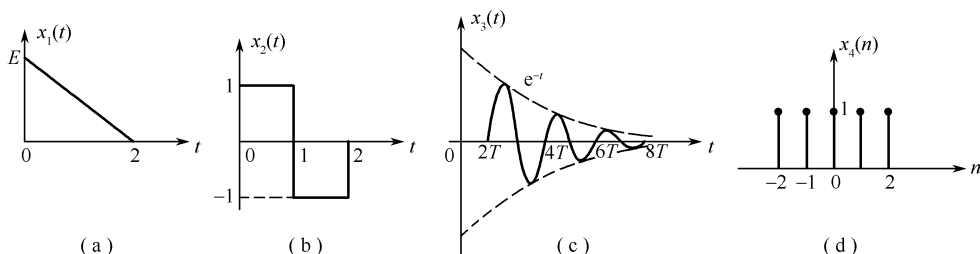
$$(3) x_3(t) = (t+1)u(t)$$

$$(4) x_4(t) = (t+1)u(t+1)$$

$$(5) x_5(t) = t[u(t) - u(t-1)]$$

$$(6) x_6(t) = tu(t) - (t-1)u(t)$$

1.2-2 写出如题 1.2-2 图所示信号的解析表示式。



题 1.2-2 图

1.2-3 利用冲激函数的广义函数定义,

$$(1) \text{证明 } \delta(at+b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right), a \neq 0, b \text{ 的实数};$$

(2) 证明  $\delta(t)$  是  $t$  的偶函数。

1.2-4 单位冲激信号的微分  $\frac{d}{dt}\delta(t)$  定义为单位冲激偶信号,记作  $\delta'(t)$ ,  $t_0$  为实数。利用冲激函数的广义函数定义,

$$(1) \text{证明 } x(t)\delta'(t-t_0) = x(t_0)\delta'(t-t_0) - x'(t_0)\delta(t-t_0);$$

$$(2) \text{证明 } \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0)x(t)dt = -x'(t_0);$$

(3) 证明  $\delta'(t)$  是  $t$  的奇函数。

1.2-5 计算下列各式:

$$(1) x(t+t_0)\delta(t) \quad (2) \left(\frac{\cos t}{t^2+2}\right)\delta(t)$$

$$(3) [e^{-t}\cos(3t-60^\circ)]\delta(t) \quad (4) \left(\frac{1}{j\omega+2}\right)\delta(\omega+3)$$

$$(5) \left(\frac{\sin k\omega}{\omega}\right)\delta(\omega) \quad (6) \frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$$

$$(7) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (8) \int_{-4}^2 e^t\delta(t+3)dt$$

$$(9) \int_0^{\infty} e^{-t}\sin t\delta(t+1)dt \quad (10) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt$$

$$(11) \int_{-1}^1 \delta(t^2-4)dt \quad (12) \int_{-\infty}^t e^{-\tau}\delta'(\tau)d\tau$$

1.3-1 粗略画出下列各解析表达式表示的信号波形:

$$(1) x(t) = (3 - e^{-t})u(t)$$

$$(2) x(t) = (5e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

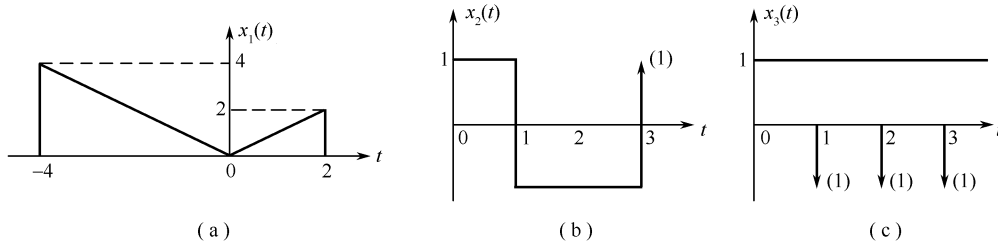
$$(3) x(t) = e^{-t}\sin 2\pi t[u(t) - u(t-3)]$$

(4)  $x(t) = \frac{\sin at}{at}, a \neq 0$  的实数

(5)  $x(n) = (-2)^{-n}[u(n) - u(n-6)]$

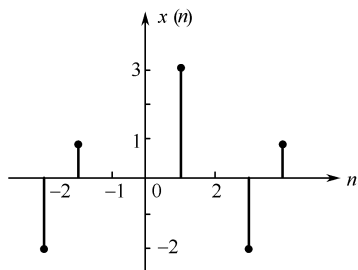
(6)  $x(n) = n[u(n) - u(n-4)]$

- 1.3-2 求解题 1.3-2 图(a) 中信号的微分,并画出波形图,求解题 1.3-2 图(b)、(c) 中信号的积分并画出波形图。



题 1.3-2 图

- 1.3-3 已知  $x(n]$  序列如题 1.3-3 图所示,试画出其累加序列  $y(n]$ 。



题 1.3-3 图

- 1.3-4 已知信号  $x(t)$  的波形如题 1.3-4 图所示,试画出下列各信号对  $t$  的波形图:

(1)  $x(-t)$

(2)  $x(-t+2)$

(3)  $x(-t-2)$

(4)  $x(2t)$

(5)  $x\left(\frac{1}{2}t\right)$

(6)  $x(t-2)$

(7)  $x\left(-\frac{1}{2}t+1\right)$

(8)  $\frac{d}{dt}\left[x\left(\frac{1}{2}t+1\right)\right]$

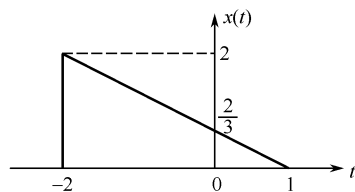
(9)  $\int_{-\infty}^t x(2-\tau) d\tau$

- 1.3-5 已知信号  $x(n]$  的波形如题 1.3-5 图所示,试画出下列各信号的波形图。

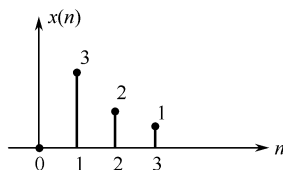
(1)  $x(n-2)$

(2)  $x(2n)$

(3)  $x(-n-2)$



题 1.3-4 图

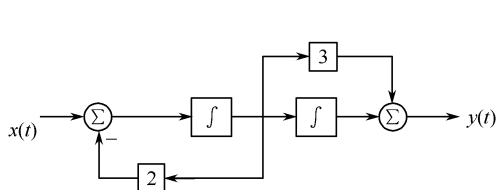


题 1.3-5 图

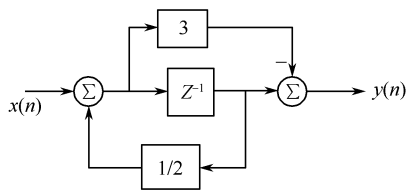
- 1.3-6 假设有一连续信号  $x(t)$  不包含间断点,试证明:如果  $x(t)$  是偶函数,则  $\frac{d}{dt}x(t)$  是奇函数,如果  $x(t)$  是奇函数,则  $\frac{d}{dt}x(t)$  是偶函数。

1.4-1 某 LTI 系统如题 1.4-1 图所示,试写出该系统的微分方程。

1.4-2 某 LTI 系统如题 1.4-2 图所示,试写出该系统的差分方程。



题 1.4-1 图



题 1.4-2 图

1.4-3 试画出下列方程所对应的模拟框图。

(1)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x''(t) + 4x(t)$

(2)  $y(n) + 0.3y(n-1) - 0.2y(n-2) = x(n) + 0.5x(n-1)$

1.5-1 试判断下列方程所描述的系统是否为线性、时不变系统。

(1)  $y''(t) + y(t) = 2x''(t) + 3x(t)$

(2)  $y''(t) + y(t) \cdot y'(t) = 2[x'(t)]^2 + 3x(t)$

(3)  $y''(t) + \sin t \cdot y'(t) + y^2(t) = 0$

(4)  $y(n+2) + y(n) \cdot y(n-1) = 2x(n)$

(5)  $y(n+2) + (n-1) \cdot y(n-1) = 2x(n)$

1.5-2 试判断下列方程所描述的系统是否为线性、时不变系统,其中  $y(0)$  为初始状态,  $x(\cdot)$  为输入信号,  $y(\cdot)$  为输出信号。

(1)  $y(t) = y(0) \cdot x(t) + \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

(2)  $y(t) = \ln y(0) + 3t^2 x(t)$

(3)  $y(t) = y(0) + \sin[x(t)]$

(4)  $y(n) = y(0) + x(n) \cdot x(n-1)$

(5)  $y(n) = (n-1)y(0) + (n-1)x(n)$

(6)  $y(n) = y(0) + \sum_{i=0}^{n+2} n^2 x(i), n = 0, 1, 2, \dots$

1.5-3 试判断下列方程所描述的系统是否为线性、时不变、记忆、因果和稳定系统,其中  $x(\cdot)$  为输入信号,  $y(\cdot)$  为输出信号。

(1)  $y(t) = a^{x(t)}$  (2)  $y(t) = x\left(1 - \frac{1}{2}t\right)$

(3)  $y(t) = x(t-1) - x(-t)$  (4)  $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$

(5)  $y(n) = x(n) \cdot x(n-1)$  (6)  $y(n) = x(2n)$

(7)  $y(n) = \sum_{i=n-2}^{n+2} x(i)$  (8)  $y(n) = nx(n)$

1.5-4 一线性连续系统在相同的初始状态下,当输入为  $x(t)$  时,全响应为  $y(t) = 2e^{-t} + \cos 2t$ ,当输入  $2x(t)$  时,全响应  $y(t) = e^{-t} + 2\cos 2t$ 。求在相同的初始条件下,输入为  $4x(t)$  时的全响应。

## 第 2 章 线性时不变系统的时域分析

系统的时域分析是指在给定的激励作用下,通过不同的数学方法去求解系统的响应。为了确定一个线性时不变系统对给定激励的响应,就要建立描述该系统的微分或差分方程,并求出满足一定初始状态的解。如果把对系统的定性和定量的分析局限在时间领域内,即所涉及的函数的自变量都是时间  $t$  或  $n$ ,这就是系统的时域分析法。这种方法比较直观,物理概念清楚,是信号与系统分析的最基本方法,也是其他各种变换域分析方法的基础。

系统数学模型的时域表示最主要的方法为输入输出法,即将系统用一元  $n$  阶微分或差分方程来表示。本章讨论系统方程的建立和求解。首先利用高等数学知识求解微分或差分方程,其解即为系统的响应或称系统的全响应,解中的齐次解和特解,又称为系统的固有响应和强迫响应。然后利用系统具有线性时不变的特性,按照产生响应的原因的不同将系统响应分解为零输入响应和零状态响应。

在系统的时域分析中引入单位冲激函数和系统的冲激响应后,利用任意信号可分解为无穷多个冲激信号之和,线性系统的零状态响应则是各输入信号中冲激分量响应的叠加,即零状态响应是外加输入与冲激响应的卷积积分或卷积和。

对于线性时不变系统,利用卷积运算求解零状态响应,此种方法物理概念清楚、运算方便,便于计算机求解。卷积运算是联系时域分析法和变换域分析法的纽带,在线性系统分析中具有重要的理论意义。本章将讨论卷积运算的主要性质及其计算方法,对于这些内容应给予高度重视。此处的性质和计算方法在变换域中同样适用。

### 2.1 连续时间系统的时域分析

系统理论上包含各种各样的系统,如电的、机械的、声学的、机电等系统,也可以是社会的、经济的、生物的等。分析任何系统首先是构建系统模型,它应该是能最逼近这个系统状态的一种数学表达式或一种规则。然后求解其响应,才能对系统进行进一步分析。这一节仅讨论建立系统的数学模型。对于连续时间线性时不变系统可用常系数微分方程来构建其系统模型。

#### 2.1.1 微分方程的建立

对电系统,建立系统的数学模型在电路理论课中已经作了详细介绍。它主要依据元件端口电流与电压的关系和基尔霍夫定律。下面举例加以说明。

**【例 2.1.1】** 如图 2.1 所示 RLC 串联二阶电路,  $x(t)$  为电压源激励信号,以回路电流  $i(t)$  为输出,试建立  $i(t)$  和输入  $x(t)$  之间的关系。

**解:** 利用 KVL 可写出

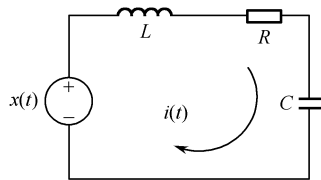


图 2.1 RLC 串联二阶电路

$$v_L(t) + Ri(t) + v_C(t) = x(t) \quad (2.1)$$

又已知

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{d}{dt} i(t) \\ v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.2)$$

式(2.2)代入式(2.1)得  $L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = x(t)$

$$\text{整理可得} \quad L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

上式是一个二阶常系数线性微分方程。由此可见,线性系统输入/输出的数学模型是用常系数微分方程来描述的。对于  $n$  阶系统的一般表达式为

$$\begin{aligned} &\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

由于是线性时不变系统,其元件参数应为恒定值,故式(2.3)中系数  $a_i, b_j$  都为常数。

各种各样的机电系统将电信号转换为机械运动(机械能量),或者相反。这里我们看一个简单的例子。图 2.2(a) 所示是一台电流源  $x(t)$  驱动的电枢控制的直流电动机。在电动机中产生的扭矩  $T(t)$  正比于电枢电流  $x(t)$ , 因此

$$T(t) = Kx(t) \quad (2.4)$$

式中  $K$  是电动机的一个常数。这个扭矩驱动一个机械负载,负载的隔离体如图 2.2(b) 所示。黏滞阻尼(系数为  $B$ ) 消耗掉扭矩为  $B\dot{\theta}(t)$ 。若  $J$  是这个负载的转动惯量(含电机转子),那么净扭矩  $T(t) - B\dot{\theta}(t)$  必须等于  $J\ddot{\theta}(t)$ , 即

$$J\ddot{\theta}(t) = T(t) - B\dot{\theta}(t) \quad (2.5)$$

因此

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) = T(t) = Kx(t) \quad (2.6)$$

写成微分方程形式为

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + B \frac{d}{dt} \theta(t) = Kx(t) \quad (2.7)$$

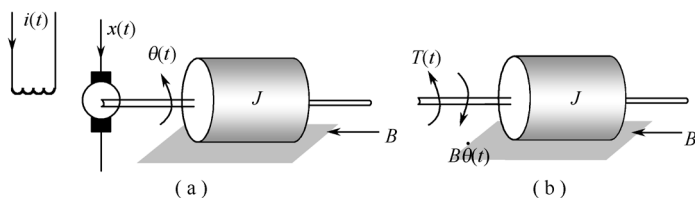


图 2.2 电枢控制直流电动机

### 2.1.2 微分方程的求解

式(2.3)微分方程的解可分为两部分:齐次解和特解。**齐次解**的函数形式只与系统本身特性有关,常称为系统的**固有响应**,记作  $y_n(t)$ 。**特解**的形式由系统的外加信号决定,常称为系统的**强迫响应**,记作  $y_f(t)$ 。所以系统的全响应  $y(t)$  为

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t) \quad (2.8)$$

按照式(2.8)先分别求固有响应和强迫响应,再求全响应,这种求解方法称为**经典法**。

#### 2.1.2.1 齐次解

**齐次解**就是与系统方程相对应的齐次方程的通解,即它满足

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = 0 \quad (2.9)$$

该方程解的基本形式为  $ke^{\lambda t}$ ,  $k$  为待定系数,将其代入式(2.9),整理后可得

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_0e^{\lambda t} = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda t} = 0$$

于是

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad (2.10)$$

式称(2.10)为式(2.9)微分方程的**特征方程**,解之可得  $n$  个根  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ,称这些根为式微分方程的**特征根**,也称为系统的特征根,在系统分析中常又称为系统的**极点**、或**自然频率**、或**固有频率**。特征根可以是  $n$  个不同的根,也可以是重根。若所有特征根均为实根,则齐次解  $y_n(t)$  有两种形式:

(1) 当特征根是各不相等实根  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$  时,解为

$$y_n(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} \quad (2.11)$$

(2) 当特征根有  $r$  个重根  $\lambda_0$  (其中  $r \leq n$ ),  $n-r$  个单根  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_{n-r}$  时,解为

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n-r} k_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n k_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} \quad (2.12)$$

式(2.11)和式(2.12)中的系数  $k_i$  都是待定系数,稍后将讨论如何确定齐次解的待定系数。

**【例 2.1.2】** 求图 2.1 所示电路的齐次解,其中  $R = 3\Omega, L = 1\text{H}, C = 1/2\text{F}$ 。

**解:**由例 2.1.1 题可得图 2.1 所示电路的微分方程为

$$L \frac{d^2}{dt^2}i(t) + R \frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}i(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

将  $R = 3\Omega, L = 1\text{H}, C = 1/2\text{F}$  代入整理得

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) + 3 \frac{d}{dt}i(t) + 2i(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得系统的特征根为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ ; 齐次解为

$$i_n(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$

### 2.1.2.2 特解

特解的函数形式与外加信号的形式有关,为求特解  $y_f(t)$ ,需根据微分方程式(2.3)右端选择合适的特解形式,代入方程后求出待定系数。表 2.1 列出了几种典型输入信号及其所对应的特解。

表 2.1 与几种典型输入信号对应的特解形式

外加信号	特解
常数 $A$	常数 $B$
$t^r$	$\sum_{i=1}^{r+1} k_i t^{r+1-i}$
$\sin \omega t$ 或 $\cos \omega t$	$k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t$
$e^{\lambda t}$	$k e^{\lambda t}, \lambda$ 不是方程的特征根
	$k t e^{\lambda t}, \lambda$ 是方程的单特征根
	$\sum_{i=1}^{r+1} k_i t^{r+1-i} e^{\lambda t}, \lambda$ 是方程的 $r$ 阶特征重根

【例 2.1.3】已知某 LTI 系统的输入  $x(t)$ , 输出  $y(t)$ , 其微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t)$$

试求当  $x(t) = t^2 + 5t + 3, y(0) = 2, y'(0) = 3$  的解。

解:由例 2.1.2 题可知其齐次解即固有响应为

$$y_n(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$

根据表 2.1, 输入  $x(t) = t^2 + 5t + 3$ , 则特解, 即强迫响应为

$$y_f(t) = k_3 t^2 + k_4 t + k_5$$

$y_f(t)$  满足方程, 即

$$y''_f(t) + 3y'_f(t) + 2y_f(t) = x'(t) \quad (2.13)$$

$y_f(t)$  的一阶和二阶导数分别为

$$y'_f(t) = \frac{d}{dt}[k_3 t^2 + k_4 t + k_5] = 2k_3 t + k_4$$

$$y''_f(t) = \frac{d^2}{dt^2}[k_3 t^2 + k_4 t + k_5] = 2k_3$$

$x(t)$  的一阶导数为

$$x'(t) = \frac{d}{dt}[t^2 + 5t + 3] = 2t + 5$$

将以上结果代入式(2.13)得

$$2k_3 + 3(2k_3 t + k_4) + 2(k_3 t^2 + k_4 t + k_5) = 2t + 5$$

即

$$2k_3 t^2 + (6k_3 + 2k_4)t + (2k_3 + 3k_4 + 2k_5) = 2t + 5$$

由这个表达式两边相同幂次项的对应系数相等可得到

$$2k_3 = 0$$

$$6k_3 + 2k_4 = 2$$

$$2k_3 + 3k_4 + 2k_5 = 5$$

联立求解这三个方程式,解得  $k_3 = 0, k_4 = 1, k_5 = 1$ 。因此有

$$y_f(t) = t + 1$$

系统的响应  $y(t)$  是固有响应和强迫响应之和,因此

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + t + 1$$

由此

$$y'(t) = -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} + 1$$

代入初始值  $y(0) = 2, y'(0) = 3$ , 可得

$$2 = k_1 + k_2 + 1$$

$$3 = -k_1 - 2k_2 + 1$$

联立这两个方程解得  $k_1 = 4, k_2 = -3$ 。因此有

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + t + 1$$

### 2.1.2.3 初始条件的确定

齐次解中待定系数  $k_i$  可根据初始条件确定。作为数学问题,可将微分方程的  $n$  个初始值  $y(0), y'(t)|_{t=0}, \dots, y^{(n-1)}(t)|_{t=0}$  作为已知条件,根据式(2.9)即可确定  $n$  个待定系数,例如,例 2.1.3 题。但作为实际系统分析,初始条件的确定应当注意,由于外加信号的作用,响应  $y(t)$  及其各阶导数有可能在激励加入时发生跳变。为区分跳变前后的数值,我们以“0<sup>-</sup>”表示激励加入之前的瞬时,以“0<sup>+</sup>”表示激励加入之后的瞬时。在  $t = 0^-$  时系统的状态称为**初始状态**,而在  $t = 0^+$  时的状态称为**起始状态**。在一般情况下,我们把系统的微分方程的解限于  $0^+ \leq t < \infty$  的时间范围,因此不能把  $y^{(k)}(0^-)$  作为初始条件,而应当利用  $y^{(k)}(0^+)$ ,代入微分方程后就能确定待定系数。

在某些情况下,起始值可能发生跳变,即  $y^{(k)}(0^+) \neq y^{(k)}(0^-)$ ,而在有些情况下起始值不跳变,即  $y^{(k)}(0^+) = y^{(k)}(0^-)$ 。因此系统的初始条件  $y^{(k)}(0^+)$  要根据系统原有的储能  $y^{(k)}(0^-)$  和激励加入时起始值有无跳变等情况来决定。

在电路分析中,为了确定初始条件,通常利用系统内部储能的连续性,即电容上电荷的连续性和电感中磁链的连续性,也就是说,在没有冲激电流或阶跃电压作用下,电容两端电压  $u_C(t)$  不发生跳变,即  $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ 。流过电感的电流  $i_L(t)$  不发生跳变,即  $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ 。当冲激电流或阶跃电压作用于电容,冲激电压或阶跃电流作用于电感时,  $u_C(0)$  或  $i_L(0)$  都会发生跳变,即  $u_C(0^+) \neq u_C(0^-), i_L(0^+) \neq i_L(0^-)$ 。下面的例 2.1.4 题可以说明这个问题。

**【例 2.1.4】** 求例 2.1.2 RLC 电路中回路电流  $i(t)$ , 输入电压  $x(t) = 10e^{-3t}u(t), i(0^-) = 0$  和  $u_C(0^-) = 5V$ 。

**解:** 由例 2.1.2 题可知固有响应为

$$i_n(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$

根据表 2.1, 输入  $x(t) = 10e^{-3t}u(t)$ , 则强迫响应为



$$i_f(t) = k_3 e^{-3t} \quad (t > 0)$$

$i_f(t)$  满足式(2.13), 即

$$i_f''(t) + 3i_f'(t) + 2i_f(t) = x'(t)$$

$i_f(t)$  的一阶和二阶导数分别为

$$i_f'(t) = \frac{d}{dt}[k_3 e^{-3t}] = -3k_3 e^{-3t}$$

$$i_f''(t) = \frac{d^2}{dt^2}[k_3 e^{-3t}] = 9k_3 e^{-3t}$$

输入  $x(t)$  的一阶导数为

$$x'(t) = \frac{d}{dt}[10e^{-3t}] = -30e^{-3t}$$

将以上结果代入式(2.13) 得到

$$2k_3 e^{-3t} = -30e^{-3t}$$

得到

$$k_3 = -15$$

因此有

$$i_f(t) = -15e^{-3t} \quad (t > 0)$$

系统的响应为

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad (2.14)$$

为了确定系数  $k_1, k_2$ , 须根据  $t = 0^-$  的初值确定  $0^+$  时刻的初值。由图 2.1 知, 在  $t = 0^-$  时, 输入  $x(t) = 0$ ; 而  $t = 0^+$  时, 输入  $x(t) = 10$ 。因此对回路利用 KVL, 有

$$i'(0^-) + 3i(0^-) + u_C(0^-) = 0$$

$$i'(0^+) + 3i(0^+) + u_C(0^+) = 10$$

因为在没有冲激电压时电流不会发生突变, 所以回路电流  $i(0^-) = i(0^+)$ , 对电容电压也有同样的道理, 因此  $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 5$ , 将这些值代入上式方程中, 得到  $i'(0^-) = -5$  和  $i'(0^+) = 5$ 。

对式(2.14) 求微分得到

$$i'(t) = -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} + 45e^{-3t}$$

将  $i(0^+) = 0, i'(0^+) = 5$  分别代入上式和式(2.14), 得到

$$0 = k_1 + k_2 - 15$$

$$5 = -k_1 - 2k_2 + 45$$

联立这两个方程式, 解得  $k_1 = -10, k_2 = 25$ 。

因此有

$$i(t) = -10e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad (t > 0)$$

应当指出, 齐次通解的形式, 完全取决于特征方程的根。构成系统的各元件本身所遵循的规律、系统的结构与参数决定了微分方程的阶次与系数。因此, 齐次通解只取决于系统本身的特性, 但其中待定系数  $k_i$  是与输入信号的初值及系统的初始状态有关的。例 2.1.4 题就反映了这一点。

### 2.1.3 零输入响应与零状态响应

对于 LTI 系统, 还可以将系统的响应分解成零输入响应和零状态响应, 即

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (2.15)$$

**零输入响应**  $y_{zi}(t)$  是指没有外加输入信号的作用, 仅由系统的初始储能所引起的响应。因而其解是系统微分方程对应的齐次方程的解, 它的形式与式(2.12) 相同, 即

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^{n-r} c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n c_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} \quad (2.16)$$

式中  $\lambda_0$  为  $r$  阶重根,  $n-r$  个单根  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_{n-r}$ ,  $c_i$  为待定系数, 仅由系统的零输入响应的初始条件决定。

**零状态响应**  $y_{zs}(t)$  是零初始条件下非齐次微分方程的全解。它包括两部分, 其一般形式为

$$y_{zs}(t) = \sum_{i=1}^{n-r} d_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n d_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} + y_f(t) \quad (2.17)$$

式中  $\lambda_0$  为  $r$  阶重根,  $n-r$  个单根  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_{n-r}$ , 待定系数  $d_i$  确定方法与式(2.16) 相同, 由系统的零状态响应的初始条件决定。

将系统响应的两种分解进行比较:

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-r} k_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n k_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t}}_{\text{固有响应}} + \underbrace{y_f(t)}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-r} c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n c_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-r} d_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n d_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} + y_f(t)}_{\text{零状态响应}} \end{aligned}$$

分析可知

$$\sum_{i=1}^{n-r} k_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n k_i t^{n-i} e^{\lambda_0 t} = \sum_{i=1}^{n-r} (c_i + d_i) e^{\lambda_i t} + \sum_{i=n-r+1}^n (c_i + d_i) t^{n-i} e^{\lambda_0 t}$$

不难看出, 虽然固有响应与零输入响应都是齐次方程的解, 但二者的系数却不相同。固有响应的系数  $k_i$  是由系统的起始条件 ( $y^{(i)}(0^+)$ ) 决定的, 即使系统初始储能为零, 固有响应也不一定为零; 而零输入响应的系数  $c_i$  则由零输入响应的起始条件决定  $y_{zi}^{(i)}(0^+)$ , 由于不存在任何冲激输入,  $y_{zi}^{(i)}(0^+)$  等于  $y_{zi}^{(i)}(0^-)$ , 也就是系统的初始状态 ( $y^{(i)}(0^-)$ )。实际上, 零输入响应只是固有响应中由系统初始储能产生的那部分响应。

**【例 2.1.5】** 试求例 2.1.4 系统的零输入响应和零状态响应。

**解:** 由例 2.1.4 题知其系统的特征根为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ , 由式(2.16), 可得

$$i_{zi}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

而  $i_{zi}(0^+) = i_{zi}(0^-) = i(0^-), i'_{zi}(0^+) = i'_{zi}(0^-) = i'(0^-)$

将  $i(0^-) = 0, i'(0^-) = -5$  分别代入上式得

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ -5 &= -c_1 - 2c_2 \end{aligned}$$

联立这两个方程式, 解为  $c_1 = -5, c_2 = 5$ 。

因此有

$$i_{zi}(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t} \quad t \geq 0$$

又因  $i(0^-) = 0, i'(0^-) = -5$ , 可求得  $i_{zi}(0^+) = 0, i'_{zi}(0^+) = -5$ 。

根据  $i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t)$  和例 2.1.4 题分析结论,  $i(0^+) = 0, i'(0^+) = 5$  得

$$i_{zs}(0^+) = 0, i'_{zs}(0^+) = 10$$

由例 2.1.4 题, 根据式(2.17), 设零状态响应为

$$i_{zs}(t) = d_1 e^{-t} + d_2 e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad (t > 0)$$

将  $i_{zs}(0^+) = 0, i'_{zs}(0) = 10$  代入上式得

$$0 = d_1 + d_2 - 15$$

$$10 = -d_1 - 2d_2 + 45$$

联立这两个方程式的解为  $d_1 = -5, d_2 = 20$ 。

系统的零状态响应为

$$i_{zs}(t) = -5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad (t > 0)$$

系统的全响应为

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{zi}(t) + i_{zs}(t) \\ &= \underbrace{-5e^{-t} + 5e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}}_{\text{零状态响应}} \\ &= -10e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

值得注意的是零输入响应解的形式, 也是完全取决于系统的特征根。若把系统每一个特征根  $\lambda_i$  对应指数  $e^{\lambda_i t}$  称为系统的特征模式, 则**零输入响应就是系统的特征模式的线性组合。其零状态响应是系统的特征模式和外加信号模式的线性组合**。一个 LTI 系统的特征模式构成了这个系统最为重要的性质。特征模式不仅决定着系统的零输入响应, 同时也在决定零状态响应中起到重要作用。也就是说, 系统的全部特性根本上都受其特征模式的支配, 在后续学习中可以看到特征模式广泛地存在于系统特性的各个方面。

LTI 系统除了可分解为固有响应和强迫响应, 以及零输入响应与零状态响应以外, 也可分解为瞬态响应和稳态响应。系统响应中随时间的增加而衰减, 并且最终完全消失得那部分响应分量称为系统的瞬态响应, 而随时间的增加而能一直保留的响应分量称为稳态响应。在例 2.1.5 题中系统的瞬态响应就等于其全响应, 稳态响应为零。

## 2.2 离散时间系统的时域分析

### 2.2.1 差分方程的建立

下面通过几个应用实例说明描述系统的差分方程是如何建立的。

**【例 2.2.1】** 设有一 RC 串联电路如图 2.3(a) 所示, 其中  $x(t) = u(t)$  为电压源激励信号, 输出为电容两端电压  $y(t)$ , 试从微分方程推导其差分方程。

**解:** 由图 2.3(a) 可得描述该系统的微分方程为

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \quad (2.18)$$

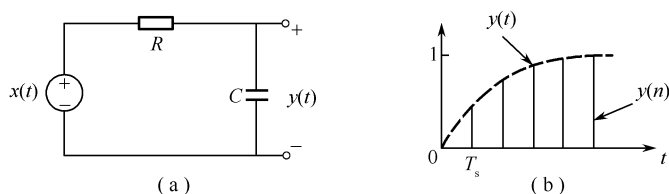


图 2.3 RC 串联电路

在数值计算中,差分法是求解微分方程的重要手段。若将连续变量  $t$  等分,则有  $t = nT_s$  ( $n$  为整数) 变成离散变量  $nT_s$ , 其中  $T_s$  为步长。连续信号  $x(t)$  在  $t = nT_s$  各点的取值构成离散序列  $x(nT_s)$ 。在  $T_s$  足够小的情况下,微分运算可表示为

$$\frac{d}{dt}y(t) \approx \frac{y[(n+1)T_s] - y(nT_s)}{T_s}$$

代入式(2.18),则有

$$\frac{y[(n+1)T_s] - y(nT_s)}{T_s} + \frac{1}{RC}y(nT_s) = \frac{1}{RC}x(nT_s)$$

经整理后,可得

$$y[(n+1)T_s] + \left(\frac{T_s}{RC} - 1\right)y(nT_s) = \frac{T_s}{RC}x(nT_s)$$

若  $T_s$  的取值为单位时间,则上式变为

$$y(n+1) + \left(\frac{1}{RC} - 1\right)y(n) = \frac{1}{RC}x(n)$$

这是一个一阶线性常系数差分方程,解之可得系统的响应,其中零状态响应  $y(n)$  的波形如图 2.3(b) 实线所示[虚线为连续的零状态响应  $y(t)$ ]。比较  $y(t)$  与  $y(n)$  的图形可知,当  $T_s$  足够小时有  $y(n) = y(t) \Big|_{t=nT_s}$ 。

根据数值计算分析,高阶微分运算也可以差分形式进行,故从高阶微分方程可以得到高阶差分方程。

**【例 2.2.2】** 一信号处理过程是:每当收到一个数据,就将此数据与前一步的处理结果平均。求这一信号处理过程的输入输出关系。

**解:** 设当前序号为  $n$ , 输入为  $x(n)$ , 输出为  $y(n)$ , 则前一步的序号为  $n-1$ , 输出为  $y(n-1)$ , 按题意, 当前输出  $y(n)$  应是当前输入  $x(n)$  与前一步输出  $y(n-1)$  的平均值, 即

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + y(n-1)]$$

亦即

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = \frac{1}{2}x(n)$$

这一过程可用图 2.4 所示的模拟框图表示。

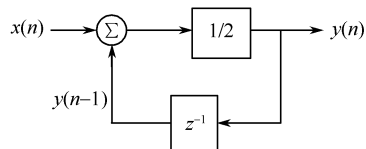


图 2.4 一阶后向差分方程系统

### 2.2.2 差分方程的求解

对于  $k$  阶 LTI 离散系统一般描述为

$$\begin{aligned} y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1y(n+1) + a_0y(n) \\ = b_mx(n+m) + b_{m-1}x(n+m-1) + \cdots + b_1x(n+1) + b_0x(n) \end{aligned} \quad (2.19)$$

求解差分方程最原始的方法为递推法。以例 2.2.2 题中得到的差分方程

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}x(n)$$

的求解为例,设  $x(n) = \delta(n)$ ,按系统具有因果性, $y(-1) = 0$ ,从而

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{2}y(-1) + \frac{1}{2}x(0) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \\ y(1) &= \frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}x(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ y(2) &= \frac{1}{2}y(1) + \frac{1}{2}x(2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

由此得

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, n \geq 0$$

递推解法用计算机较为方便。这种方法简单,概念清楚,但一般只能得出数值解,而不能直接给出完整的解析解。

与求解微分方程相似,利用经典法也可以对差分方程求解,分别求其齐次解  $y_n(n)$  和特解  $y_f(n)$ 。然后根据边界条件确定  $y_n(n)$  中的待定系数,从而求得系统的全响应

$$y(n) = y_n(n) + y_f(n) \quad (2.20)$$

#### 1. 齐次解

一般差分方程对应的齐次方程可表示为

$$y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1y(n+1) + a_0y(n) = 0 \quad (2.21)$$

于是

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (2.22)$$

式(2.22)称为式(2.19)差分方程的特征方程,解之可得  $k$  个特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 。特征根可以是  $k$  个不同的根,也可以是重根。若所有特征根均为实根,齐次解  $y_n(n)$  的通式为

$$y_n(n) = \sum_{i=1}^{k-r} k_i(\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^k k_i n^{k-i}(\lambda_0)^n \quad (2.23)$$

式中  $\lambda_0$  为  $r$  阶重根,  $k-r$  个单根  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_{k-r}$ ,  $k_i (i=1, \cdots, k)$  是待定系数,由边界条件确定。

#### 2. 特解

特解的函数形式取决于外加信号的形式,为求特解  $y_f(n)$ ,需根据差分方程式(2.19)右端选择合适的特解形式,代入方程后求出待定系数。表 2.2 列出了几种典型输入信号及其所对应的特解。

表 2.2 与几种典型输入信号对应的特解形式

外加信号	特解
$n^m$	$k_m n^m + k_{m-1} n^{m-1} + \cdots + k_1 n + k_0$
$\lambda^n$	$k\lambda^n, \lambda$ 不是方程的特征根
	$(k_1 n + k_2)\lambda^n, \lambda$ 是方程的单特征根
	$\sum_{i=1}^{r+1} k_i n^{r+1-i} \lambda^n, \lambda$ 是方程的 $r$ 阶特征重根

差分方程的解可以表示为齐次解  $y_n(n)$  与  $y_f(n)$  特解之和,即

$$\begin{aligned}
 y(n) &= y_n(n) + y_f(n) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-r} k_i (\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^k k_i n^{k-i} (\lambda_0)^n + y_f(n)
 \end{aligned}$$

式中的待定系数  $k_i$  需要根据边界条件决定。对于  $k$  阶差分方程,应给定  $k$  个边界条件,如  $y(0), y(1), \cdots, y(k-1)$ 。对于因果系统,常以  $y(-1), y(-2), \cdots, y(-k)$  表示边界条件。若激励在  $n=0$  时加入系统,这组边界条件就表示系统的初始状态。

根据以上分析,线性常系数差分方程的解中的齐次解和特解分别与线性常系数微分方程解中的齐次解和特解具有类似的特性,即**齐次解**只决定于系统本身的性质,**特解**取决于外加信号。因此差分方程的齐次解也称为**固有响应**,特解称为**强迫响应**,即 LTI 离散系统的响应可分解为固有响应和强迫响应之和。

【例 2.2.3】 设某离散系统的差分方程为

$$y(n) - 4y(n-1) + 3y(n-2) = x(n)$$

初始条件为  $y(0) = -\frac{1}{2}, y(1) = 0, x(n) = 2^n u(n)$ , 试求系统的响应  $y(n)$ 。

解:先求固有响应。由差分方程得特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

特征根为两个单实根  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ 。固有响应的一般形式为

$$y_n(n) = k_1(1)^n + k_2(3)^n$$

再求强迫响应。因输入  $x(n) = 2^n$ , 查表 2.2 得一般形式为

$$y_f(n) = k_3 \cdot 2^n$$

代入原差分方程,有

$$k_3(2)^n - 4k_3(2)^{n-1} + 3k_3(2)^{n-2} = (2)^n$$

解之得  $k_3 = -4$ , 所以有  $y_f(n) = -4(2)^n$

系统响应为

$$y(n) = y_n(n) + y_f(n) = k_1 + k_2(3)^n - 4(2)^n$$

将初始条件  $y(0) = -\frac{1}{2}, y(1) = 0$  代入上式,得

$$k_1 + k_2 - 4 = -\frac{1}{2}$$

$$k_1 + 3k_2 - 4 \times 2 = 0$$

解方程得  $k_1 = \frac{5}{4}, k_2 = \frac{9}{4}$ , 因此系统的响应为

$$y(n) = \frac{5}{4} + \frac{9}{4}(3)^n - 4(2)^n$$

### 2.2.3 零输入响应与零状态响应

对于 LTI 系统, 还可以将系统的响应分解为零输入响应和零状态响应。**零输入响应**  $y_{zi}(n)$  是指没有外加输入信号的作用, 仅由系统的初始储能所引起的响应。零状态响应  $y_{zs}(n)$  则是指系统的初始状态为零, 仅由外加信号  $x(n)$  引起的响应。

因此, 系统的全响应  $y(n)$  可表示为

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \quad (2.24)$$

根据以上分析, 零输入响应是系统微分方程对应的齐次方程的解, 其一般形式为

$$y_{zi}(n) = \sum_{i=1}^{k-r} c_i (\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^k c_i n^{k-i} (\lambda_0)^n \quad (2.25)$$

式中  $\lambda_0$  为  $r$  阶重根,  $k-r$  个单根  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_{k-r}, c_i (i=1, \cdots, k)$  是待定系数, 由系统的初始条件确定。

零状态响应  $y_{zs}(n)$  是非齐次差分方程的解。它包括两部分, 其一般形式为

$$y_{zs}(n) = \sum_{i=1}^{k-r} d_i (\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^k d_i n^{k-i} (\lambda_0)^n + y_f(n) \quad (2.26)$$

式中  $d_i$  为待定系数。

由以上分析可知系统响应可分解为

$$\begin{aligned} y(n) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k-r} c_i (\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^k c_i n^{k-i} (\lambda_0)^n}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-r} d_i (\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^k d_i n^{k-i} (\lambda_0)^n + y_f(n)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k-r} k_i (\lambda_i)^n + \sum_{i=k-r+1}^k k_i n^{k-i} (\lambda_0)^n}_{\text{固有响应}} + \underbrace{y_f(n)}_{\text{强迫响应}} \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-r+1}^k k_i n^{k-i} (\lambda_0)^n &= \sum_{i=k-r+1}^k (c_i + d_i) n^{k-i} (\lambda_0)^n \\ \sum_{i=1}^{k-r} k_i (\lambda_i)^n &= \sum_{i=1}^{k-r} (c_i + d_i) (\lambda_i)^n \end{aligned}$$

分析对比可知, 离散系统与连续系统各响应分量的求解规律是完全相似的。

**【例 2.2.4】** 试求例 2.2.3 差分方程的零输入响应, 零状态响应和全响应, 已知  $y(-1) = 0, y(-2) = \frac{1}{2}$ 。

**解:** 先求零输入响应  $y_{zi}(n)$ 。由例 2.2.3 题可知差分方程的特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ 。

零输入响应的一般形式为

$$y_{zi}(n) = c_1(1)^n + c_2(3)^n$$

将初始条件  $y(-1) = y_{zi}(-1) = 0, y(-2) = y_{zi}(-2) = 1/2$  代入上式,得

$$0 = c_1 + c_2(3)^{-1}$$

$$\frac{1}{2} = c_1 + c_2(3)^{-2}$$

解方程得  $c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = -\frac{9}{4}$ , 零输入响应为

$$y_{zi}(n) = \frac{3}{4} - \frac{9}{4}(3)^n$$

再求零状态响应。 $y_{zs}(n)$  满足方程

$$y_{zs}(n) - 4y_{zs}(n-1) + 3y_{zs}(n-2) = 2^n u(n)$$

下面用递推的方法求  $y_{zs}(0), y_{zs}(1)$ 。由上式可得

$$y_{zs}(0) = 4y_{zs}(-1) - 3y_{zs}(-2) + 2^0 = 1$$

$$y_{zs}(1) = 4y_{zs}(0) - 3y_{zs}(-1) + 2^1 = 6$$

又由例 2.2.3 题解知,特解  $y_f(n) = -4(2)^n$ , 由式(2.26)得  $y_{zs}(n)$  一般形式为

$$y_{zs}(n) = d_1(1)^n + d_2(3)^n - 4(2)^n$$

代入零初始值,有

$$y_{zs}(0) = d_1 + d_2(3)^0 - 4(2)^0 = 1$$

$$y_{zs}(1) = d_1 + d_2(3)^1 - 4(2)^1 = 6$$

解之得  $d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{9}{2}$ , 零状态响应  $y_{zs}(n)$  为

$$y_{zs}(n) = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}(3)^n - 4(2)^n$$

系统全响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \\ &= \underbrace{\left( \frac{3}{4} - \frac{9}{4}(3)^n \right)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \frac{9}{2}(3)^n - 4(2)^n \right)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \frac{5}{4} + \frac{9}{4}(3)^n - 4(2)^n \end{aligned}$$

可见其全响应与例 2.2.3 题的解完全相同。

## 2.3 系统的单位冲激响应与单位样值响应

LTI 连续时间系统的单位冲激响应,是指系统初始状态为零,仅由单位冲激信号  $\delta(t)$  所产生的响应,简称冲激响应,记作  $h(t)$ 。而 LTI 离散时间系统的单位样值响应,是指系统初始状态为零,激励为单位样值信号  $\delta(n)$  所产生的响应,又称脉冲响应(或抽样响应),记作  $h(n)$ 。连续系统的单位冲激响应与离散系统的单位样值响应反映了系统的特性,同时也是利用卷积积分与卷积和进行系统时域分析的重要基础。



### 2.3.1 连续时间系统的单位冲激响应

LTI 连续时间系统的描述方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m}x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt}x(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

由于单位冲激响应  $h(t)$  是  $x(t) = \delta(t)$  时的响应,故上式可变为

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}h(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}h(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt}h(t) + a_0 h(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m}\delta(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt}\delta(t) + b_0 \delta(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

求解上式,即得  $h(t)$ 。

可以看到在式(2.27)中等式右边不但包含冲激函数项,而且还包含其各阶导数项,因此  $h(t)$  有以下两个特点:

第一,  $h(t)$  的形式与  $n, m$  值的相对大小密切相关。为使等式(2.27)成立,则待求的函数  $h(t)$  所包含的各奇异函数项必须分别与等式右边的各奇异函数项相平衡。当  $n = m$  时,  $h(t)$  中必含  $\delta(t)$ ; 当  $n < m$  时,  $h(t)$  中将含  $\delta(t)$  及其导数。

第二, 因为  $t > 0$  时,  $\delta(t)$  及其各阶导数均等于零; 所以式(2.27)等式右边恒等于零。故  $h(t)$  与系统零输入响应有相同的形式。

综上所述,单位冲激响应  $h(t)$  的一般形式为

$$h(t) = b_m \delta(t) + [\text{特征模式项}]u(t) \quad (2.28)$$

在式(2.28)中,若  $n > m$ , 则  $b_m = 0$ 。因此,对于因果系统,冲激项  $h(t) = b_m \delta(t)$  仅在  $n = m$  时存在。式(2.28)中特征模式项是  $n$  个特征模式项的线性组合,加权系数可以通过冲激平衡的方法来确定,这点将在下面的例 2.3.1 题中解释。

**【例 2.3.1】** 试求例 2.1.2 题所示电路的单位冲激响应  $h(t)$ 。

**解:** 由例 2.1.1 题可得其微分方程式为

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) + 3 \frac{d}{dt}i(t) + 2i(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

可知  $b_m = 0$ , 因此  $h(t)$  仅由特征模式组成。特征方程式为  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ 。特征根为  $-1$  和  $-2$ 。因此单位冲激响应  $h(t)$  为

$$h(t) = (c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t})u(t)$$

对上式求导,得

$$\begin{aligned} h'(t) &= (c_1 + c_2)\delta(t) + (-c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t})u(t) \\ h''(t) &= (c_1 + c_2)\delta'(t) + (-c_1 - 2c_2)\delta(t) + (c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

令  $x(t) = \delta(t)$  和  $y(t) = h(t)$ , 并将上述两式代入系统微分方程, 经整理得到

$$(c_1 + c_2)\delta'(t) + (2c_1 + c_2)\delta(t) = \delta'(t)$$

由冲激平衡法, 等式两边的  $\delta(t)$  和  $\delta'(t)$  前的系数应对应相等, 故有

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$2c_1 + c_2 = 0$$

解得  $c_1 = -1, c_2 = 2$ 。故单位冲激响应  $h(t)$  为

$$h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

以上例题讨论了只有单特征根的情况, 如果方程的特征根中包含重根, 方法同样, 但运算非常繁琐。在第4章中将讨论另一种更简单方法, 即用拉普拉斯变换求解单位冲激响应  $h(t)$ 。

### 2.3.2 离散时间系统的单位样值响应

与前面求解差分方程一样, 求单位样值响应  $h(n)$  也有两种方法: 递推法和平衡法。由于  $\delta(n)$  只在  $n = 0$  时取值, 所以利用递推法非常方便。

**【例 2.3.2】** 设因果离散系统的差分方程为

$$y(n) - 0.6y(n-1) - 0.16y(n-2) = 5x(n)$$

试求其单位样值响应  $h(n)$ 。

**解:** 根据单位样值响应的定义, 令  $x(n) = \delta(n)$  和  $y(n) = h(n)$  代入上述差分方程, 得

$$h(n) - 0.6h(n-1) - 0.16h(n-2) = 5\delta(n)$$

满足初始条件为零, 即  $h(-1) = 0, h(-2) = 0$ , 代入上式, 并递推, 得

$$h(0) = 0.6h(-1) + 0.16h(-2) + 5\delta(0) = 5$$

$$h(1) = 0.6h(0) + 0.16h(-1) + 5\delta(1) = 0.6 \cdot 5 + 0 + 0 = 3$$

$$h(2) = 0.6h(1) + 0.16h(0) + 5\delta(2) = 0.6 \cdot 3 + 0.16 \cdot 5 + 0 = 2.6$$

.....

如此继续, 可以求出  $h(n)$  中任意项。对于高阶系统, 多采用平衡法。不足的是, 这样的解法并不一定能得到  $h(n)$  的闭式解。虽然如此, 用递推法求出  $h(n)$  的某些值对用平衡法求闭式解也是十分有用的, 例 2.3.3 将说明这一点。

**【例 2.3.3】** 试用平衡法求例 2.3.2 的系统的单位样值响应  $h(n)$ 。

**解:** 由例 2.3.2 题求知, 用递推法可求出  $h(0) = 5, h(1) = 3$ 。而当  $n > 0$  时, 系统的差分方程变成齐次差分方程, 即

$$h(n) - 0.6h(n-1) - 0.16h(n-2) = 0$$

该系统的特征方程为

$$\lambda^2 - 0.6\lambda - 0.16 = 0$$

特征根为  $-0.2$  和  $0.8$ , 对应的特征模式为  $(-0.2)^n$  和  $(0.8)^n$ 。

参照式(2.25),得其单位样值响应  $h(n)$  为

$$h(n) = c_1(-0.2)^n + c_2(0.8)^n \quad (n > 0)$$

由例 2.3.2 题已求得  $h(0) = 5, h(1) = 3$ , 代入上式得:

$$h(0) = c_1 + c_2 = 5$$

$$h(1) = c_1(-0.2) + c_2(0.8) = 3$$

解得  $c_1 = 1, c_2 = 4$ 。因此单位样值响应  $h(n)$  为

$$h(n) = (-0.2)^n + 4(0.8)^n \quad (n \geq 0)$$

或写成

$$h(n) = [(-0.2)^n + 4(0.8)^n]u(n)$$

## 2.4 连续时间 LTI 系统:卷积积分

在 2.3.1 节我们研究了线性时不变系统在零状态条件下,输入为冲激信号系统产生冲激响应的过程。冲激响应可以说是零状态响应的一个特例。本节我们讨论线性时不变系统在任意输入信号下,它的零状态响应的求解方法——卷积积分法。

### 2.4.1 利用卷积积分计算系统的零状态响应

设有任意信号  $x(t)$ , 如图 2.5(a) 所示, 据 1.3 节分析, 我们知道任一连续信号  $x(t)$  都可分解成一系列冲激信号序列, 即

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau) \Delta\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

LTI 系统在  $t = n\Delta\tau$  时刻加入的冲激信号的响应应是  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \Delta\tau h(t - n\Delta\tau)$ , 如图 2.5(e) 所示。显然在信号作用下, 系统的响应应为所有冲激响应的总和, 即

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) h(t - n\Delta\tau) \Delta\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

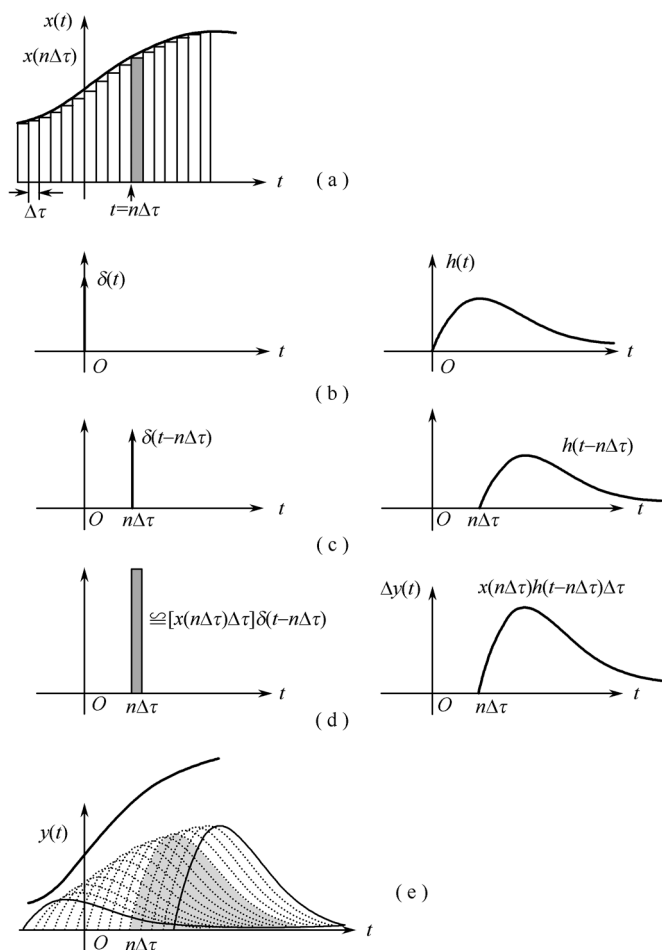
记为

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.29)$$

式中,  $\tau$  为虚设积分变量, 式(2.29)的积分运算称为**卷积积分**, 记作

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad (2.30)$$

图 2.5(d) 给出各冲激响应叠加的结果。式(2.30)表明, 系统对于输入信号  $x(t)$  的零状态响应  $y_{zs}(t)$ , 即是信号  $x(t)$  与系统的冲激响应  $h(t)$  的卷积积分。换句话说, 系统的零状态响应可以通过求输入信号  $x(t)$  与系统冲激响应  $h(t)$  的卷积积分来获得。

图 2.5 系统对任意信号  $x(t)$  的响应

【例 2.4.1】 已知一 LTI 系统的冲激响应  $h(t) = e^{-at}u(t)$ , 输入为  $x(t) = u(t)$ , 试求零状态响应  $y_{zs}(t)$ 。

解: 将已知  $x(t)$  和  $h(t)$  代入式(2.30), 则

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-a(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

式中, 积分变量为  $\tau$ 。由于

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}, \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

所以积分限应为  $0 < \tau < t$ 。故

$$y_{zs}(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} u(t) d\tau = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

从例 2.4.1 题可看出, 若系统为因果系统, 即  $h(t) = 0, t < 0$ ; 而且输入信号为因果信号, 即  $x(t) = 0, t < 0$ , 式(2.29)可写成

$$y_{zs}(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau u(t) \quad (2.31)$$

### 2.4.2 卷积积分的图解法

卷积积分是一种数学运算,利用图解可以使其运算关系形象直观,便于理解。知道两个卷积信号的图形,可以利用图解直接求出其卷积积分值。下面说明卷积积分的图解过程。

设有两函数  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ ,其图形如图 2.6 所示。设  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  的卷积积分为  $y(t)$ ,则

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (2.32)$$

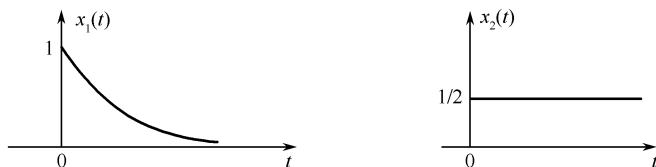


图 2.6 两函数  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  的波形

在上式中,积分变量是  $\tau$ ,函数  $x_1(\tau)$ 、 $x_2(\tau)$  与原波形完全相同,只需横坐标换成  $\tau$  即可。为了求出  $x_1(\tau)$  与  $x_2(\tau)$  在任何  $t$  时刻的卷积,式(2.32)的图解算法过程可分为翻转、平移、相乘与积分 4 个步骤,现叙述如下:

(1) 翻转:将  $x_1(\tau)$ 、 $x_2(\tau)$  的自变量  $t$  用  $\tau$  代换,然后将函数  $x_2(\tau)$  以纵坐标为轴翻转,就得到与  $x_2(\tau)$  对称函数  $x_2(-\tau)$ ,如图 2.7(b) 所示。

(2) 平移:将函数  $x_2(-\tau)$  沿正  $\tau$  轴平移  $t$  就得到函数  $x_2(t - \tau)$ ,如图 2.7(c) 所示。

(3) 相乘:将  $x_1(\tau)$  [如图 2.7(a) 所示] 与翻转平移后的函数  $x_2(t - \tau)$  相乘。两波形重叠部分相乘有值,不重叠部分乘积为零,如图 2.7(d) 所示。

(4) 积分: $x_1(\tau)$  与  $x_2(t - \tau)$  乘积曲线下的面积即为  $t$  时刻的卷积值,见图 2.7(d) 中的阴影部分。

以  $t$  为横坐标,将与  $t$  对应的积分值绘成曲线,就是卷积积分  $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$  的图形,如图 2.7(e) 所示。

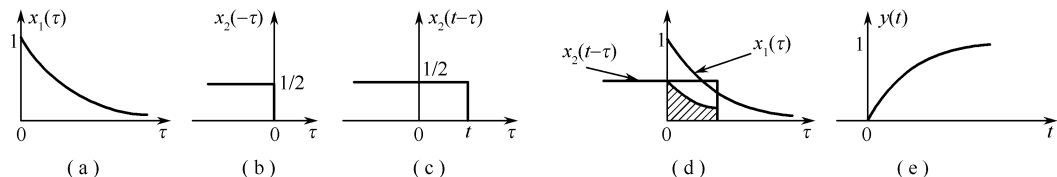


图 2.7 卷积的图解过程

**【例 2.4.2】** 试计算图 2.8(a) 所示函数  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  的卷积积分。

**解:** 两函数的表达式分别为

$$x_1(\tau) = \begin{cases} 2 & 4 \leq \tau \leq 5 \\ 0 & \tau \text{ 其它值} \end{cases} \quad x_2(\tau) = \begin{cases} 1 & 1 \leq \tau \leq 3 \\ 0 & \tau \text{ 其它值} \end{cases}$$

首先将  $x_2(\tau)$  翻转为  $x_2(-\tau)$ ,如图 2.8(b)。然后将  $x_2(-\tau)$  沿  $\tau$  轴自左向右平移  $t$ ,得到  $x_2(t - \tau)$ ,其中  $t$  从  $-\infty$  逐渐增大。由于两个函数均为有限长函数,因此相乘后积分应分几个区间进行。图 2.8 画出了有关计算过程:

(1) 当  $t - 1 < 4$ , 即  $t < 5$  时,如图 2.8(c) 所示,  $x_1(\tau)$  与  $x_2(t - \tau)$  波形无重叠部分,

$$x_1(t) * x_2(t) = 0。$$

(2) 当  $4 \leq t-1 < 5$ , 即  $5 \leq t < 6$  时, 由图 2.8(d) 所示,  $x_1(\tau)$  与  $x_2(t-\tau)$  两波形重叠区间为  $4 < \tau < t-1$ , 因此

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_4^{t-1} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_4^{t-1} 2 \times 1 d\tau \\ &= 2t - 10 \end{aligned}$$

(3) 当  $t-1 \geq 5$  且  $t-3 < 4$ , 即  $6 \leq t < 7$  时, 如图 2.8(e) 所示,  $x_1(\tau)$  与  $x_2(t-\tau)$  两波形重叠区间为  $4 < \tau < 5$ , 有

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_4^5 2 \times 1 d\tau = 2$$

(4) 当  $4 \leq t-3 < 5$ , 即  $7 \leq t < 8$  时, 在  $t-3 < \tau < 5$  的区间两波形重叠, 如图 2.8(f) 所示, 有

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-3}^5 2 \times 1 d\tau = 16 - 2t$$

(5) 当  $t-3 > 5$ , 即  $t > 8$  时, 如图 2.8(g) 所示, 两波形无重叠, 即  $x_1(t) * x_2(t) = 0$ 。

将上述结果整理可得

$$x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} 2t - 10 & 5 \leq t < 6 \\ 2 & 6 \leq t < 7 \\ 16 - 2t & 7 \leq t \leq 8 \\ 0 & t < 5 \text{ 或 } t > 8 \end{cases}$$

其波形如图 2.8(h) 所示。

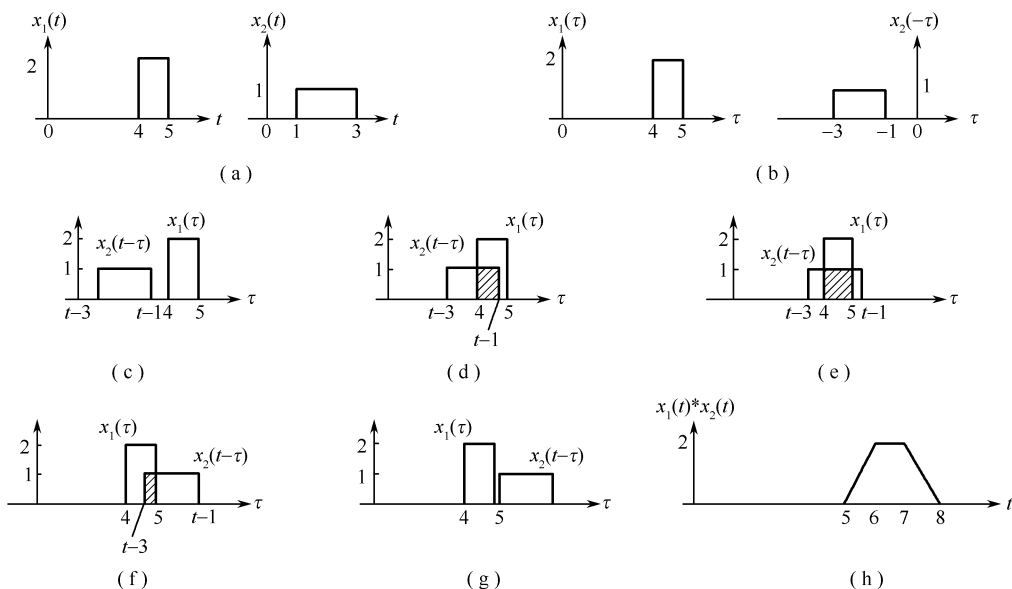


图 2.8 例 2.4.2 卷积过程的图解

在上例中  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  和  $x_1(t) * x_2(t)$  的宽度(持续时间)分别为 1、2 和 3, 波形起点分别为 1、4 和 5。也就是说  $x_1(t) * x_2(t)$  的宽度是  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  的宽度之和, 起点也是  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  的起点之和, 这并不是巧合。利用图解法的概念容易看出, 若  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  分别具有有

限宽度  $T_1$  和  $T_2$ , 则  $x_1(t) * x_2(t)$  的宽度就等于  $T_1 + T_2$ 。原因是, 一个宽度为  $T_1$  的函数要完全通过另一宽度为  $T_2$  的函数, 直到它们没有重叠的部分, 需要经过  $T_1 + T_2$  时间。当两函数没有重叠部分时, 其卷积积分值为零。同样利用图解法可以看出  $x_1(t) * x_2(t)$  起点也是  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  的起点之和。

### 2.4.3 卷积积分的性质

卷积积分作为一种数学运算方法, 具有某些特殊的有用性质。利用这些性质不仅可使卷积运算本身得以简化, 而且还可给信号与系统分析提供不少方便。

#### 2.4.3.1 卷积代数

作为一种数学运算, 卷积积分遵守代数运算的某些规律。

##### 1. 交换律

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad (2.33)$$

**证明:** 根据式(2.29)

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

将式(2.33)中积分变量  $\tau$  替换为  $t - \lambda$ , 于是

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_{\infty}^{-\infty} -x_1(t - \lambda) x_2(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\lambda) x_1(t - \lambda) d\lambda \\ &= x_2(t) * x_1(t) \end{aligned}$$

这表明卷积积分结果与两函数的次序无关。

##### 2. 分配律

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \quad (2.34)$$

**证明:** 由卷积积分定义有

$$\begin{aligned} x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) [x_2(t - \tau) + x_3(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_3(t - \tau) d\tau \\ &= x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \end{aligned}$$

实际上这个结果也是线性可加特性的体现。

##### 3. 结合律

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] \quad (2.35)$$

**证明:** 由卷积积分定义有

$$\begin{aligned} &[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(\eta - \tau) d\tau \right] x_3(t - \eta) d\eta \end{aligned}$$

先交换上式的积分次序,再将  $\eta - \tau$  置换为  $\xi$ ,则

$$\begin{aligned} [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\eta - \tau) x_3(t - \eta) d\eta \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi) x_3(t - \tau - \xi) d\xi \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_{23}(t - \tau) d\tau \\ &= x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] \end{aligned}$$

其中

$$x_{23}(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi) x_3(t - \tau - \xi) d\xi$$

即

$$x_{23}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi) x_3(t - \xi) d\xi = x_2(t) * x_3(t)$$

### 2.4.3.2 与冲激信号或阶跃信号的卷积积分特性

1.  $\delta(t)$  是卷积积分的单位元

卷积积分中最简单的情况是两个函数之一是冲激函数。根据定义及冲激函数的性质有

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t) &= \delta(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) x(t - \tau) d\tau = x(t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

表明任意函数与冲激函数卷积仍是该函数自身,所以常称冲激函数是卷积积分的单位元。

进一步有

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = x(t - t_0) \quad (2.37)$$

这就是说,函数与  $\delta(t - t_0)$  卷积的结果,相当于将函数本身延时  $t_0$ 。由式(2.37)可得出如下的有益推论:

$$\begin{aligned} x(t - t_1) * g(t - t_2) &= x(t) * \delta(t - t_1) * g(t) * \delta(t - t_2) \\ &= x(t) * g(t) * \delta(t - t_1 - t_2) \\ &= x(t - t_1 - t_2) * g(t) \\ &= x(t) * g(t - t_1 - t_2) \end{aligned}$$

2.  $\delta'(t)$  是微分器

$$\begin{aligned} \delta'(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= x(t - \tau) \delta(\tau) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} x'(t - \tau) \delta(\tau) d\tau \\ &= 0 + x'(t - \tau) \Big|_{\tau=0} = x'(t) \end{aligned}$$

即

$$\delta'(t) * x(t) = x'(t) \quad (2.38)$$

不难推广到

$$\delta^{(n)}(t) * x(t) = x^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

3.  $u(t)$  是积分器

$$u(t) * x(t) = x(t) * u(t)$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \triangleq x^{(-1)}(t)
 \end{aligned}$$

即

$$u(t) * x(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \triangleq x^{(-1)}(t) \quad (2.40)$$

由此又可推广为

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t) * x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^t \cdots \int_{-\infty}^t}_{n \uparrow} x(\tau) d\tau \cdots d\tau \triangleq x^{(-n)}(t), n = 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

### 2.4.3.3 卷积的微积分特性

由前述卷积性质还可以推出,两函数的卷积结果的微积分,与其中一个函数先微积分后再与另一函数相卷积的结果,二者是相等的。即

$$1. \quad \frac{d}{dt}[x(t) * g(t)] = \left[ \frac{d}{dt}x(t) \right] * g(t) = x(t) * \left[ \frac{d}{dt}g(t) \right] \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad \frac{d}{dt}[x(t) * g(t)] &= \delta'(t) * [x(t) * g(t)] \\
 &= [\delta'(t) * x(t)] * g(t) \\
 &= x(t) * [\delta'(t) * \delta(t)]
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^t [x(\tau) * g(\tau)] d\tau = x(t) * \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau = \left[ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] * g(t) \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad \int_{-\infty}^t [x(\tau) * g(\tau)] d\tau &= u(t) * [x(t) * g(t)] \\
 &= [u(t) * x(t)] * g(t) \\
 &= x(t) * [u(t) * g(t)]
 \end{aligned}$$

$$3. \quad \left[ \frac{d}{dt}x(t) \right] * \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau = x(t) * g(t) \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
 \text{因为} \quad \left[ \frac{d}{dt}x(t) \right] * \int_{-\infty}^t g(t) dt &= \delta'(t) * x(t) * u(t) * g(t) \\
 &= [\delta'(t) * u(t)] * [x(t) * g(t)] \\
 &= \delta(t) * x(t) * g(t) = x(t) * g(t)
 \end{aligned}$$

类似地,还可以推出卷积积分的高阶导数和多重积分运算的关系,这些关系对于简化卷积运算是很重要的。设

$$y(t) = x(t) * g(t)$$

则

$$y^{(i)}(t) = x^{(j)}(t) * g^{(i-j)}(t) \quad (2.45)$$

式中,当  $i, j$  为正整数时,为导数的阶次,若为负整数时,为重积分的次数。式(2.44)可看成是式(2.45)的特例( $i = 0, j = 1$ )。

【例 2.4.3】 利用卷积积分的性质重新计算例 2.4.2 题。

解: 由图 2.8(a) 可得  $x_1(t) = 2[u(t-4) - u(t-5)]$

$$x_2(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

由式(2.44) 可知

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= x_1'(t) * \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \\ &= 2[\delta(t-4) - \delta(t-5)] * [(t-1)u(t-1) - (t-3)u(t-3)] \end{aligned}$$

利用式(2.37), 有

$$x_1(t) * x_2(t) = 2[(t-5)u(t-5) - (t-6)u(t-6) - (t-7)u(t-7) + (t-8)u(t-8)]$$

## 2.5 离散时间 LTI 系统: 卷积和

求解离散系统的零状态响应, 也可采用与连续系统卷积积分相似的方法。但与连续系统卷积积分法比较, 存在两点不同: 一是由于离散信号本身就是一个不连续序列, 因此将外加信号进行分解就很容易实现; 二是由于系统对每个样值的响应也是一个离散时间序列, 而离散序列的求和过程无需进行积分, 因此离散系统的零状态响应表现为一个卷积和的过程。

### 2.5.1 零状态响应: 卷积和

由 1.2.3 节中式(1.30) 可知, 任意离散序列可表示单位样值信号及其延时信号的加权和, 即

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \\ &= \cdots x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + \cdots \end{aligned} \quad (2.46)$$

设 LTI 系统对  $\delta(n)$  的零状态响应为  $h(n)$  (即单位样值响应), 根据系统的线性和时不变特性, 系统对  $x(k)\delta(n-k)$  的零状态响应为  $x(k)h(n-k)$ , 因此系统对式(2.46) 所示的任意信号的零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \cdots + x(-1)h(n+1) + x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

上式即为信号  $x(n)$  与  $h(n)$  的卷积和, 记作

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (2.47)$$

这表明 LTI 系统对任意外加信号  $x(n)$  的零状态响应  $y_{zs}(n)$  等于外加信号  $x(n)$  与系统单位样值响应  $h(n)$  的卷积和。

物理可实现的系统是因果的, 即其单位样值响应应满足

$$h(n) = 0, n < 0$$

因此, 因果系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k)$$

通常系统输入都是在  $n = 0$  时加入的, 而将  $n = 0$  以前的输入响应折算为系统的初始条件。即输入信号满足  $x(n) = 0, n < 0$ , 为因果序列。这样, **因果系统** 对输入为 **因果序列** 的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k)u(n) \quad (2.48)$$

### 2.5.2 卷积和的性质

离散卷积具有与连续卷积类似的一些性质。

#### 1. 卷积代数

卷积和也服从交换律、结合律和分配律, 即

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n) \quad (2.49)$$

$$[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) = x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] \quad (2.50)$$

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n) \quad (2.51)$$

#### 2. $\delta(n)$ 是离散卷积和的单位元

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \quad (2.52)$$

即任意序列  $x(n)$  与  $\delta(n)$  的卷积和仍为序列自身  $x(n)$ 。进一步推广, 还有

$$x(n) * \delta(n-k) = x(n-k) \quad (2.53)$$

$$x(n-k_1) * \delta(n-k_2) = x(n-k_1-k_2) \quad (2.54)$$

#### 3. $u(n)$ 是数字积分器

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) * u(n) \quad (2.55)$$

### 2.5.3 卷积和的计算

下面我们通过例子来讨论卷积和的计算方法。

#### 2.5.3.1 直接按定义或性质计算

**【例 2.5.1】** 设有离散信号  $x_1(n) = u(n), x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ , 求  $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$

**解:** 由定义式(2.47)得

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n (2)^k \end{aligned}$$

由等比求和公式有

$$y(n) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 0)$$

该题也可利用卷积和的性质3—— $u(n)$  是数字积分器性质,得到

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) * x_2(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x_2(k) = \sum_{k=-\infty}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

### 2.5.3.2 图解法

对比式(2.47)和式(2.29)可见,卷积和与卷积积分的计算过程很相似,区别就是用求和运算代替了积分运算。设两个序列为  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$ , 则其卷积计算的步骤是:

- (1) 变量置换:把离散信号  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的变量,都用  $k$  置换,变为  $x_1(k)$  和  $x_2(k)$ 。
- (2) 翻转:将  $x_2(k)$  关于纵轴翻转,变为  $x_2(-k)$ 。
- (3) 移位:把  $x_2(-k)$  延  $k$  轴平移  $n$ ,得  $x_2(n-k)$ 。 $n > 0$  把  $x_2(-k)$  向右移  $n$  位; $n < 0$ ,把  $x_2(-k)$  向左移  $|n|$  位。
- (4) 相乘与累加:对给定的  $n$  值,求  $x_1(k)$  与  $x_2(n-k)$  的各点值,并累加得该  $n$  值对应的  $y(n)$  值。

下面用例子说明图解法计算卷积和的过程。

**【例 2.5.2】** 用图解法求解例 2.5.1 题。

**解:**如图 2.9 所示, $n = 0$  时:

$$y(0) = \sum_{k=0}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = 1 \times 1 = 1$$

$n = 1$  时:

$$y(1) = \sum_{k=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = \frac{3}{2}$$

$n = 2$  时:

$$y(2) = \sum_{k=0}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = \frac{7}{4}$$

$n = 3$  时

$$y(3) = \sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = \frac{15}{8}$$

⋮

由此可以画出卷积和  $y(n)$  的图形,如图 2.9(g) 所示,图解法比较简便,概念清楚,但不易得到闭合形式的解答。

一般地,如两序列长度分别为  $n_1$  和  $n_2$ ,则它们的卷积的长度为  $n_1 + n_2 - 1$ ,这与连续卷积的时长等于两函数的时长之和是不同的。

### 2.5.3.3 用竖式法计算

用竖式法计算卷积和,是采用与竖式乘法一样的格式,只是各点分别乘,分别加,不跨点进

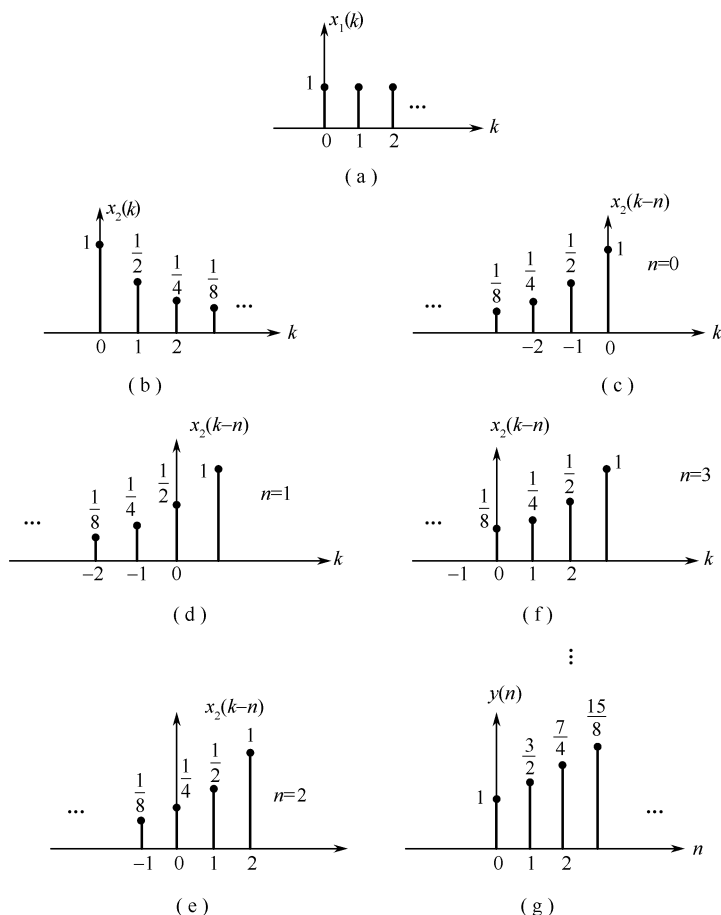


图 2.9 卷积和的图解法

位,卷积结果的起始序号等于两序列起始序号之和(这种方法的证明是很直观的,留给读者作为练习)。

**【例 2.5.3】** 用竖式法计算  $x_1(n) = \{2, 1, 5\}_0$ ,  $x_2(n) = \{3, 1, 4, 2\}_1$  的卷积和  $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 。

**解:** 写出竖式,卷积和如下:

$$\begin{array}{r}
 \{3 \quad 1 \quad 4 \quad 2\}_1 \\
 \times) \quad \{2 \quad 1 \quad 5\}_0 \\
 \hline
 15 \quad 5 \quad 20 \quad 10 \\
 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \\
 +) \quad 6 \quad 2 \quad 8 \quad 4 \\
 \hline
 \{6 \quad 5 \quad 24 \quad 13 \quad 22 \quad 10\}_1
 \end{array}$$

即  $y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \{6, 5, 24, 13, 22, 10\}_1$

此例序列中  $x_1(n)$  的长度是 3(3 样点),  $x_2(n)$  的长度是 4,  $y(n)$  的长度是  $3 + 4 - 1 = 6$ 。

可见卷积和有与卷积积分类似的结论。若两序列长度分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 则它们的卷积后长度为  $n_1 + n_2 - 1$ , 卷积和的起点为两序列起点之和。

离散卷积还可利用  $z$  变换法计算,这将在第8章中讨论。

以上都是作理论分析时计算离散卷积和的方法,在工程实际中,离散卷积是用计算机计算的。如果序列点数很多,可用快速傅里叶变换(FFT)变换到频域相乘,再用FFT方法变换回时域,这些内容在第9章中将会讨论。

## 2.6 系统的特征根及特征模式对系统行为的影响

现在我们来定性地分析一下,系统的行为是由系统的特征根和特征模式决定的,以此加深对系统行为的理解。

### 2.6.1 系统行为对特征模式的依赖

我们已经知道系统的零输入响应是由系统的特征模式组成的。对于稳定系统,这些特征模式呈指数衰减且最终消失。这个行为可能会造成这样一个印象,即这些模式没有从实质上影响一般的系统行为,特别是系统响应。这完全是错误的。我们会看到系统的特征模式在系统行为的各个方面都留下了印记。

回想一下,系统的特征模式对系统来说是非常特殊的,因为系统可以在没有任何外部输入的情况下维持这些信号。现在我们考虑若对系统施加一与系统特征模式相同形式的输入,系统的行为会发生什么变化?

考虑一个具有单一特征模式  $e^{\lambda t}$  的一阶系统,其输入为  $e^{\beta t}$ ,则系统的单位冲激响应为  $Ae^{\lambda t}$ ,其中  $A$  的值在这种定性分析中并不重要。于是系统响应  $y(t)$  为

$$y(t) = x(t) * h(t) = e^{\beta t} u(t) * Ae^{\lambda t} u(t)$$

计算得

$$y(t) = \frac{A}{\beta - \lambda} [e^{\beta t} u(t) - e^{\lambda t}] u(t) \quad (2.56)$$

很明显,若输入  $e^{\beta t}$  与  $e^{\lambda t}$  相似,  $\beta - \lambda$  有较小值,对系统响应较大。输入  $x(t)$  越接近系统特征模式,系统响应就越强烈;相反,若输入与特征模式相差很大,  $\beta - \lambda$  有较大值,系统响应较弱。它可以推广到  $n$  个特征模式的  $n$  阶系统。这类系统的单位冲激响应是其  $n$  个模式的线性组合。因此,若  $x(t)$  与其中任一模式接近,相应的响应就会很高;若它与任何模式都不相似,响应就会很小。很明显,特征模式对决定系统对给定输入的响应时有很大影响。

从式(2.56)很容易得出这样的错误结论:如果输入与特征模式完全相同,即  $\beta = \lambda$ ,则系统响应将会趋于无穷。然而,如果  $\beta = \lambda$  时式(2.56)右边分子也为零。这个复杂的行为就是谐振现象,将在本节稍后研究。

接下来我们仅就单位冲激响应(是由特征模式组成的)来讨论系统的行为。

### 2.6.2 系统时间常数

系统对激励的响应是有一定的响应时间。换句话说,当一个激励作用时,在系统对激励做出充分响应之前,会有一段时间流逝。这个时间上的滞后,或响应时间就称为系统时间常数。一

个系统的时间常数与其冲激响应  $h(t)$  的宽度是相等的。因为系统输入  $\delta(t)$  是瞬时的,即零持续时间,而它的响应  $h(t)$  却有持续期  $T_h$ ,所以,系统需要时间  $T_h$  来对输入产生充分响应,将  $T_h$  视为系统的响应时间或时间常数是合理的。通过另一种途径也可以得到同样的结论。系统响应是输入与  $h(t)$  的卷积。如果一个输入是持续期为  $T_x$  的脉冲,则根据卷积性质,输出脉冲持续期为  $T_x + T_h$ 。这个结论也说明系统需要  $T_h$  秒时间来对输入作出充分的响应。系统时间常数表明系统的快慢:具有较小时间常数的系统是较快的系统,它对输入的响应较快;具有较大时间常数的系统是一个迟缓的系统,它不能够对快速变化的信号作出很好的响应。

严格地说,单位冲激响应  $h(t)$  的持续时间应为  $\infty$ ,因为特征模式在  $t \rightarrow \infty$  时才趋近于 0。然而,当时间超过一定  $t$  后,  $h(t)$  可以忽略。因此有必要使用某种合适的度量来表示单位冲激响应的有效宽度。

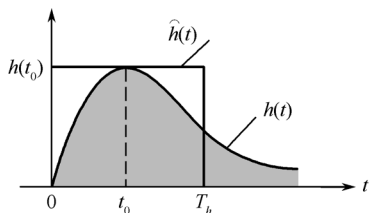


图 2.10 冲激响应的有效持续期

没有哪一种对有效信号持续时间(宽度)的定义是能够满足所有的情况的。对于如图 2.10 描述的情况,可以将  $h(t)$  持续时间定义为矩形脉冲  $\hat{h}(t)$  的宽度  $T_h$ 。这个矩形脉冲  $\hat{h}(t)$  的面积与  $h(t)$  面积相同,其高度等于  $h(t)$  在某一适当时刻  $t = t_0$  的高度,在图 2.10 中,  $t_0$  选取为使  $h(t)$  最大的时刻。根据这个定义,有

$$T_h h(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$$

或

$$T_h = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt}{h(t_0)} \quad (2.57)$$

现在若系统有单个模式  $h(t) = Ae^{\lambda t}u(t)$ ,则当  $\lambda$  是实数且为负时,  $h(t)$  在  $t = 0$  时有最大值  $h(0) = A$ 。因此,根据式(2.57)有

$$T_h = \frac{\int_0^{\infty} Ae^{\lambda t} dt}{A} = -\frac{1}{\lambda} \quad (2.58)$$

由此,这种情况下的时间常数就是(负的)系统特征根的倒数。对于多模式情况,  $h(t)$  是系统特征模式的加权和,而  $T_h$  就是与  $n$  个系统模式相关的时间常数的加权平均。

### 2.6.3 系统时间常数与上升时间

系统的上升时间,定义为单位阶跃响应从其稳定状态值的 10% 上升到 90% 所需的时间,是反映系统响应速度的指标。系统时间常数也可以从上升时间的角度来看。系统单位阶跃响应  $y(t)$  是  $u(t)$  和  $h(t)$  的卷积。假设系统单位冲激响应  $h(t)$  为一宽度为  $T_h$  的矩形脉冲,如图 2.11(b) 所示。这个卷积的结果如图 2.11(c) 所示。可见,输出并没有像输入一样,瞬时从零上升到最终值;相反,输出经历了  $T_h$  秒才完成这一过程。所以,系统上升时间  $T_r$  等于其时间常数  $T_h$ ,即  $T_r = T_h$ 。这个结果和图 2.11 都说明了系统一般不会瞬间对输入作出响应,而是需要时间  $T_h$  才能充分响应。

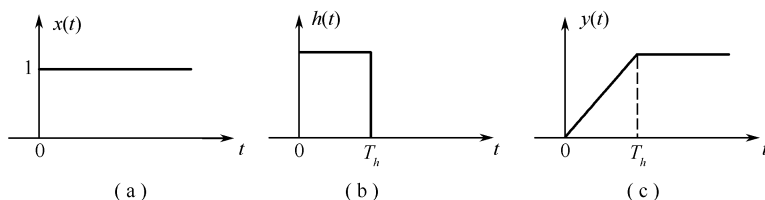


图 2.11 系统的上升时间

### 2.6.4 系统时间常数与滤波

时间常数大意味着是一个迟缓的系统,它需要很长时间才能充分地对输入作出响应。这样的系统无法对输入中的快速变化做出有效的响应;相反,时间常数小则表明系统有能力对输入中的快速变化作出响应。因此,系统的时间常数与其滤波特性之间有着直接的联系。

一个高频正弦波随时间变化很快,具有较大时间常数的系统就无法对此信号作出很好的响应。为了说明这点,我们通过将输入与图 2.12(a) 中的有效单位冲激响应  $h(t)$  相卷积来确定系统对正弦输入  $x(t)$  的响应。从图 2.12(b) 和图 2.12(c) 可以看到  $h(t)$  分别与两个不同频率的正弦输入进行卷积的过程。在图 2.12(b) 中正弦信号具有较高的频率,而图 2.12(c) 中正弦信号的频率较低。已知  $x(t)$  与  $h(t)$  的卷积等于乘积  $x(\tau)h(t-\tau)$  下的面积。对于两种不同情况,分别在图 2.12(b) 和图 2.12(c) 中用阴影表示出这个面积。对于高频正弦,从图 2.12(b) 很清楚可以看到  $x(\tau)h(t-\tau)$  下的面积很小,因为它的正面积和负面积几乎相互抵消。这种情况下,输出  $y(t)$  仍然是周期的,但幅度很小。当正弦周期远小于系统时间常数  $T_h$  时就会发生这种情况。相反,对于低频正弦,正弦周期大于  $T_h$ ,使  $x(\tau)h(t-\tau)$  下面积抵消程度减小。因此,输出  $y(t)$  较大,如图 2.12(c) 所示。

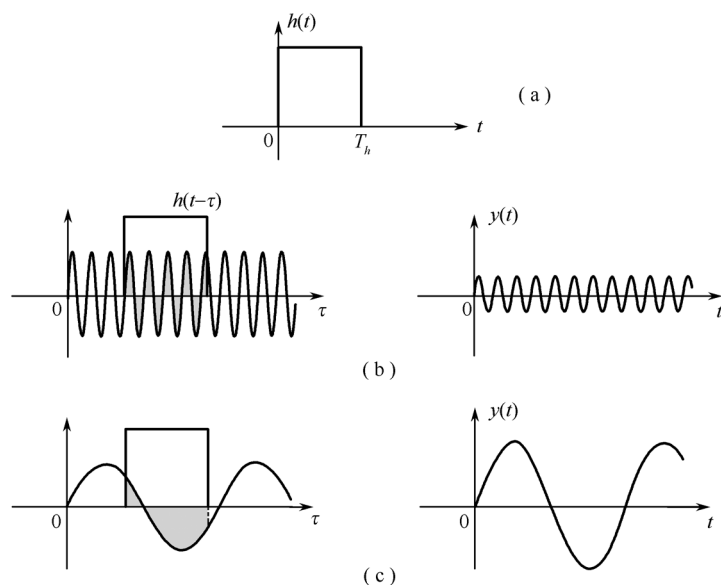


图 2.12 时间常数与滤波

在系统行为的这两种极端情况之间,当正弦周期与系统时间常数  $T_h$  相等时,存在一个转



折点。转折点的频率称为系统的截止频率  $f_c$ , 即

$$f_c = \frac{1}{T_h} \quad (2.59)$$

频率  $f_c$  也称为是系统带宽, 因为系统允许频率低于  $f_c$  的正弦分量通过, 而对频率高于  $f_c$  的分量则衰减。当然, 系统行为的过渡是逐渐的, 在  $f_c = 1/T_h$  处系统行为并没有发生剧烈的变化。另外, 上述结果是基于理想矩形脉冲冲激响应的。实际中这些结果会稍有不同, 取决于  $h(t)$  的具体形式。

由于系统时间常数与其上升时间又是相等的, 所以一个经验丰富的工程师可以仅凭在示波器上观察系统对单位阶跃输入的响应就能很快地估计出未知系统的带宽。

### 2.6.5 时间常数与脉冲色散

一般说来, 一个脉冲在系统中的传输会引起脉冲色散。因此, 输出脉冲一般比输入脉冲要宽。这种系统行为在通信系统中会产生严重后果。色散导致了相邻脉冲的干扰和重叠, 使脉冲幅度发生失真, 从而在接收到的信息中产生差错。

如果输入  $x(t)$  是宽度为  $T_x$  的脉冲, 则输出  $y(t)$  是宽度  $T_y$  为, 则

$$T_y = T_x + T_h \quad (2.60)$$

这个结果说明一个输入脉冲经过系统后产生了色散。由于  $T_h$  也是系统时间常数或上升时间, 脉冲的色散量就等于系统的时间常数或上升时间。

### 2.6.6 时间常数与信息传输速率

在脉冲通信系统中, 信息传输速率正比于脉冲传输速率。这里将要说明: 为了避免脉冲在信道中的色散而对信息产生的破坏, 信息传输速率不能超过通信信道的带宽。

由于输入脉冲色散了  $T_h$  秒, 相继的脉冲之间应相隔  $T_h$  秒以避免两脉冲间的干扰。因此, 脉冲传输速率不能超过  $1/T_h$  脉冲/每秒。由于  $1/T_h = f_c$  (信道的宽度), 以每秒  $f_c$  个脉冲的速率在信道中传输脉冲就能够避免明显的脉冲间干扰。所以, 信息传输速率正比于信道带宽。

以上的讨论说明了系统时间常数决定了系统的很多特性: 它的滤波特性、上升时间、脉冲色散, 等等。反过来, 系统时间常数又取决于系统的特征根。很明显, 特征根以及它们在单位冲激响应  $h(t)$  中所占比例的相对大小决定了系统的行为。

### 2.6.7 谐振现象

最后, 我们讨论最不可思议的谐振现象。前面曾提到, 谐振现象会在输入信号与系统特征模式相同或十分近似时发生。为了简单起见, 考虑只有单一模式  $e^{\lambda t}$  的一阶系统。令这个系统的单位冲激响应为

$$h(t) = Ae^{\lambda t} \quad (2.61)$$

输入为

$$x(t) = e^{(\lambda - \varepsilon)t}$$

由此给出系统响应  $y(t)$  为

$$y(t) = Ae^{\lambda t} * e^{(\lambda - \epsilon)t} = Ae^{\lambda t} \left( \frac{1 - e^{-\epsilon t}}{\epsilon} \right) \quad (2.62)$$

现在,当  $\epsilon \rightarrow 0$ , 括号内的分子分母都趋于零。利用洛必达法则,得到

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t) = At e^{\lambda t} \quad (2.63)$$

很明显,当  $\epsilon \rightarrow 0$  时响应并没有趋于无穷,却得到了一个因子  $t$ ,当  $t \rightarrow \infty$  时它趋于无穷。若  $\lambda < 0$  的实数(它位于 LHP),  $e^{\lambda t}$  衰减比  $t$  快,当  $t \rightarrow \infty$  时  $y(t) \rightarrow 0$ 。这种情况下谐振现象虽然已经存在,但是却由于信号本身的指数衰减而没有表现出来。

这就说明谐振是一个积累的现象,而不是瞬时的,它随  $t$  的增加线性积累。当模式指数衰减时,信号衰减太快使谐振无法抵消其衰减,结果在谐振积累产生之前,信号就已经消失了。然而,若信号衰减的速度小于  $1/t$ ,就能够清楚地看到谐振现象。这种情况在  $\text{Re}[\lambda] \geq 0$  时可能出现。例如当  $\text{Re}[\lambda] = 0$ , 即  $\lambda = j\omega$ , 式(2.63)变为

$$y(t) = At e^{j\omega t} \quad (2.64)$$

这时,响应确实随  $t$  线性增加至无穷。

对于一个实系统,如果  $\lambda = j\omega$  是系统的一个根,则  $\lambda^* = -j\omega$  必然也是一个根;于是单位冲激响应形式为  $Ae^{j\omega t} + Ae^{-j\omega t} = 2A \cos \omega t$ 。这个系统对输入  $\cos \omega t$  的响应为  $\cos \omega t * 2A \cos \omega t$ 。可以证明这个卷积包含有形式为  $At \cos \omega t$  的项。谐振现象清楚可见。系统对其特征模式的响应随时间线性增加,最终达到无穷,如图 2.13 所示。

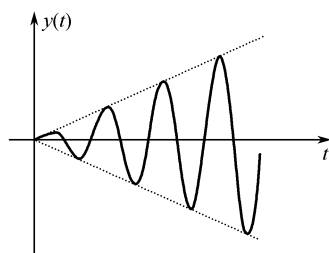
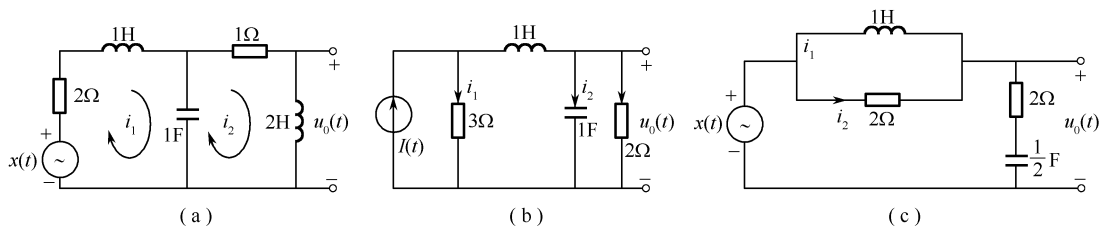


图 2.13 系统谐振响应

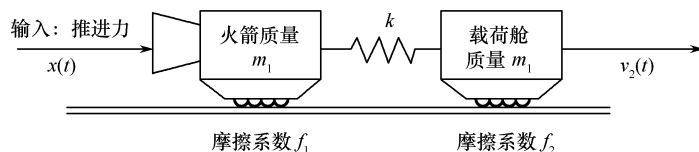
## 习 题 二

2.1-1 在题 2.1-1 图所示电路中,输入为  $x(t)$  或  $I(t)$ , 分别建立以  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $y(t)$  为输出的微分方程。



题 2.1-1 图

2.1-2 题 2.1-2 图所示为理想火箭推动器模型。火箭质量为  $m_1$ , 载荷舱质量为  $m_2$ , 两者中间用刚度系数为  $k$  的弹簧相联结。火箭和载荷舱各自受到摩擦力的作用, 摩擦系数分别为  $f_1$  和  $f_2$ 。求火箭推进力  $x(t)$  与载荷舱运动速度  $v_2(t)$  之间的微分方程表示。



题 2.1-2 图

- 2.1-3 已知系统微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t)$ , 初始条件  $y(0) = 2, y'(0) = 3$ , 当输入信号  $x(t)$  分别为以下三种形式时, 求其系统的全响应  $y(t)$ 。

$$(1)x(t) = 10e^{-3t}u(t) \quad (2)x(t) = 5u(t) \quad (3)x(t) = e^{-2t}u(t)$$

- 2.1-4 已知系统微分方程为  $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = x'(t) + 2x(t)$ , 初始条件  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , 当输入信号  $x(t)$  分别为以下三种形式时, 求其系统的全响应  $y(t)$ 。

$$(1)x(t) = u(t) \quad (2)x(t) = e^{-t}u(t) \quad (3)x(t) = e^{-3t}u(t)$$

- 2.1-5 已知系统微分方程和初始条件如下, 试求其  $y(0^+)$ 、 $y(0^-)$  和  $y'(0^+)$  的初始值。

$$(1) y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2, x(t) = u(t)$$

$$(2) y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2x(t), y(0^-) = 2, y'(0^-) = 1, x(t) = e^{-t}u(t)$$

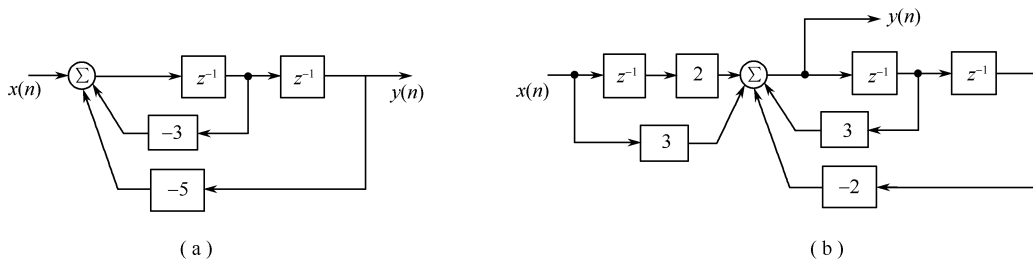
- 2.1-6 已知系统微分方程为  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 6x(t)$ , 当输入信号  $x(t) = (1 + e^{-t})u(t)$ , 初始条件  $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 0$ , 试求其系统的全响应  $y(t)$ 、零输入响应、零状态响应、固有响应和强迫响应。

- 2.2-1 已知二阶微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

初始条件  $y(0) = 0, \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 3$ , 抽样间隔或步长  $T = 0.1$ , 试导出其差分方程。

- 2.2-2 如题 2.2-2 图所示是系统的模拟框图, 请列出其差分方程。



题图 2.2-2

- 2.2-3 一个乒乓球从  $H$  米高度自由下落至地面, 每次弹跳起的最高值是前一次最高值的  $4/5$ 。若以  $y(n)$  表示第  $n$  次跳起的最高值, 试列写描述此过程的差分方程式。又若给定高度  $H = 2$  米, 解此差分方程。

- 2.2-4 设某离散系统的差分方程为

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = x(n+1) - 5x(n)$$

当输入信号  $x(n) = (3n + 5)u(n)$ , 初始条件  $y(0) = 4, y(1) = 13$ , 试求系统全响应  $y(n)$ 。

- 2.2-5 求解下列差分方程:

$$(1) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0, y(0) = 1$$

$$(2) y(n) - 2y(n-1) = 0, y(1) = 1$$

$$(3) y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0, y(-1) = 0, y(-2) = 1$$

$$(4) y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 0, y(0) = y(-1) = 1$$

$$(5) y(n) + y(n-2) = 0, y(0) = 1, y(1) = 2$$

$$(6) y(n) + 2y(n-1) = x(n), x(n) = (n-2)u(n), y(0) = 1$$

$$(7) y(n) - 2y(n-1) = x(n), x(n) = 2u(n), y(0) = 0$$

$$(8) y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = x(n), x(n) = \frac{4}{3}(3)^n u(n), y(-1) = 0, y(0) = 0$$

2.2-6 设某离散系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

当输入信号  $x(n] = (2)^n u(n)$ , 初始条件  $y(0) = 0, y(1) = 2$ , 试求其系统的全响应  $y(n)$ 、零输入响应、零状态响应、固有响应和强迫响应。

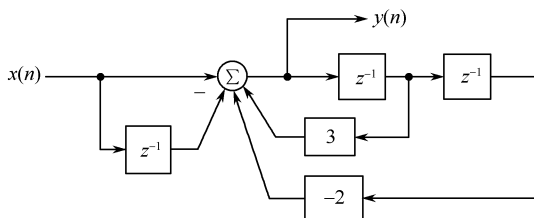
2.3-1 系统的微分方程如下, 试求其冲激响应:

$$(1) \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$

$$(2) \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(3) \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 3 \frac{d}{dt}x(t) + 3x(t)$$

2.3-2 离散系统如题 2.3-2 图所示, 写出系统的差分方程并求单位样值响应。



题 2.3-2 图

2.3-3 已知描述系统的差分方程如下, 试求系统的单位样值响应。

$$(1) y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = x(n)$$

$$(2) y(n) - 2y(n-1) - 5y(n-2) + 6y(n-3) = x(n)$$

$$(3) y(n+2) - y(n+1) + 0.25y(n) = x(n)$$

2.3-4 已知某离散时间系统的单位冲激响应为

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) + u(n-1)]$$

求该系统的差分方程并画出系统模拟框图。

2.3-5 对于单位冲激响应为  $h(t)$  的连续时间系统, 证明若系统是稳定系统需满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ 。

同样证明单位冲激响应为  $h(n)$  的离散时间系统, 若系统是稳定系统需满足  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ 。

2.4-1 计算卷积积分  $x_1(t) * x_2(t)$ :

$$(1) x_1(t) = u(t), x_2(t) = e^{-at} u(t)$$

$$(2) x_1(t) = \delta(t), x_2(t) = \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$(3) x_1(t) = u(t-2), x_2(t) = e^{-at} u(t)$$

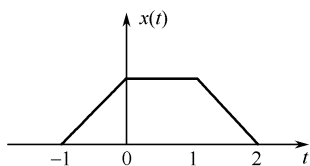
$$(4) x_1(t) = u(t+1) - u(t-1), x_2(t) = \sin(\pi t)u(t)$$

$$(5) x_1(t) = \cos \omega t, x_2(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

$$(6) x_1(t) = 2e^{-t}[u(t) - u(t-3)], x_2(t) = 4[u(t) - u(t-2)]$$

$$(7) x_1(t) = G_2(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, x_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

2.4-2 信号  $x(t)$  波形如题 2.4-2 图所示, 计算下面的卷积积分, 并画出卷积积分后  $y(t)$  的波形。



题 2.4-2 图

$$(1) y(t) = x(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-1)]$$

$$(2) y(t) = x(t) * [\delta(t-1) - \delta(t-2) + \delta(t+3)]$$

$$(3) y(t) = x(t) * \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t-3i)$$

2.4-3 证明: 如果一个线性时不变系统, 对于  $x(t)$  的响应是  $y(t)$ , 那么该系统对于  $\frac{d}{dt}x(t)$  的响应为  $\frac{d}{dt}y(t)$  (提示: 利用卷积求导的性质)。

2.4-4 某系统对输入  $x(t) = e^{-5t}u(t)$  的响应是  $y(t) = \sin \omega_0 t u(t)$ , 借助于题 2.4-3 的结论, 试求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

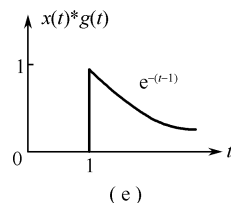
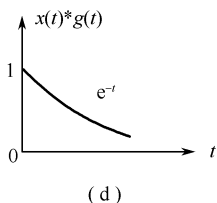
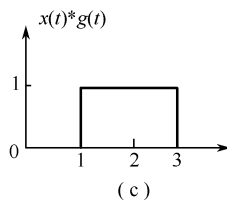
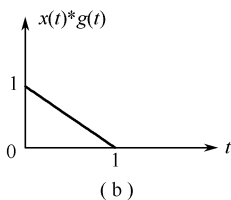
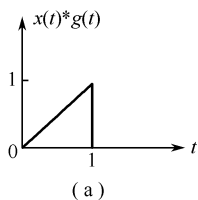
2.4-5 已知  $x(t) * g(t)$  的波形如题 2.4-5 图示, 请就各图画出下列卷积的波形图。

$$(1) x'(t) * g(t)$$

$$(2) \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau * g(t)$$

$$(3) x(t-1) * g(t)$$

$$(4) [x(t) + x(t-1)] * g(t)$$



题 2.4-5 图

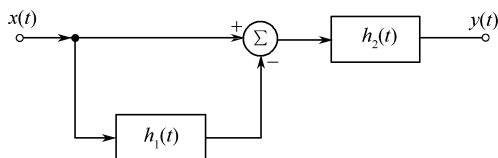
2.4-6 某系统如题 2.4-6 图所示, 已知  $h_1(t) = \delta(t-1)$ ,  $h_2(t) = u(t)$ 。

(1) 试求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

(2) 若输入  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , 求其零状态响应  $y_{zs}(t)$ 。

2.4-7 某系统微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 3x(t)$$



题 2.4-6 图

其单位冲激响应  $h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$ , 当输入为  $x(t) = e^{-4t}u(t)$  时, 系统的全响应为

$$y(t) = \frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}, t \geq 0$$

试确定系统的零输入响应和零状态响应; 固有响应和强迫响应; 瞬态响应和稳态响应。

2.5-1 求下面各组序列的卷积和:

$$(1) x_1(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad x_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) x_1(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 7 \\ 7, & n = 8 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad x_2(n) = \begin{cases} 2, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

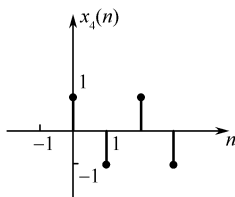
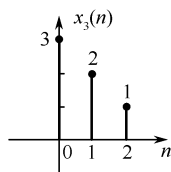
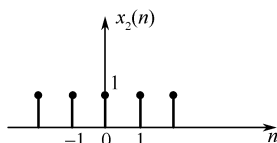
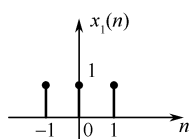
2.5-2 序列如题 2.5-2 图所示, 求下列卷积和:

$$(1) x_1(n) * x_2(n)$$

$$(2) x_2(n) * x_3(n)$$

$$(3) x_3(n) * x_4(n)$$

$$(4) [x_2(n) - x_1(n)] * x_3(n)$$



题 2.5-2 图

2.5-3 计算下列各组序列的卷积和  $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ :

$$(1) x_1(n) = u(n), x_2(n) = u(n)$$

$$(2) x_1(n) = 0.5^n u(n), x_2(n) = u(n)$$

$$(3) x_1(n) = 2^n u(n), x_2(n) = 3^n u(n)$$

$$(4) x_1(n) = 2^n u(-n), x_2(n) = u(n)$$

$$(5) x_1(n) = (-0.5)^n u(n-4), x_2(n) = 4^n u(-n+2)$$

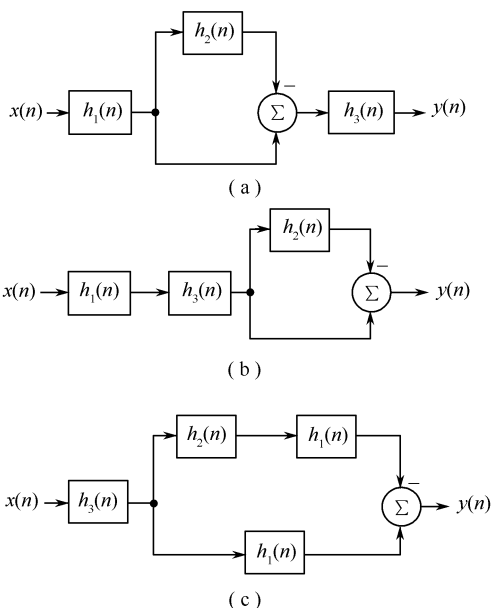
2.5-4 已知序列  $x_1(n) = 2[u(n) - u(n-6)]$ ,  $x_2(n) = 3[u(n) - u(n-8)]$

求  $n = 1, 4, 6, 8, 11, 13$  时的  $x_1(n) * x_2(n)$ 。

2.5-5 如题 2.5-5 图所示三个系统,均由子系统组成,各子系统的单位响应分别为:

$$h_1(n) = u(n); h_2(n) = \delta(n-3); h_3(n) = (0.8)^n u(n)$$

试证明这三个系统是等效的,并求出单位样值响应  $h(n)$ 。



题 2.5-5 图

2.5-6 某地质勘探测试设备给出的发射信号  $x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$ , 接收回波信号

$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ , 若地层反射特性的冲激响应以  $h(n)$  表示, 且满足  $y(n) = h(n) * x(n)$ , 试求  $h(n)$ , 并画出系统的模拟框图。

2.5-7 某离散系统的差分方程为:

$$y(n] + 0.2y(n-1) - 0.15y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

(1) 画出该系统的模拟框图;

(2) 若系统的单位样值响应为  $h(n) = \left[-\frac{5}{8}(-0.5)^n + \frac{13}{8}(0.3)^n\right]u(n)$ , 输入为  $x(n) = 0.6^n u(n)$ , 求零状态响应  $y_{zs}(n)$ 。

2.5-8 若  $x(n) = 3^n u(n)$ , 且  $y(-1) = 0, y(-2) = 1$ , 试求题 2.3-2 所示系统的全响应  $y(n)$ 。

2.6-1 对于一个特征根为  $\lambda = -10^4$  的一阶 LTI 连续系统

(1) 求其单位阶跃响应的上升时间  $T_r$ ;

(2) 求该系统的带宽;

(3) 求能通过这个系统传输的信息脉冲的速率。

2.6-2 某一信道带宽为 10kHz。一个持续期为 0.5ms 的脉冲信号通过该信道传输。

(1) 求接收到脉冲的宽度(持续期);

(2) 求这些脉冲在不产生脉冲间干扰的前提下, 在这个信道中传输的最大速率。

## 第3章 连续时间信号的频域分析

在前两章中我们讨论了连续信号和系统的时域分析。这种分析方法只是信号与系统分析方法之一。事实上,根据理论分析及实际工程的需要,我们习惯于通过频谱考虑信号的问题,通过频率响应考虑系统的问题。在本章中,我们应用数学上的傅里叶级数和傅里叶变换对连续时间信号进行讨论。首先通过正交分解,将周期信号分解为频率成整数倍关系的正余弦信号(或虚指数信号)的线性组合——傅里叶级数。然后扩展傅里叶级数,引出主要适用于非周期信号的傅里叶变换。由于傅里叶级数和傅里叶变换的实质在于将信号分解成“不同频率”的简谐振荡信号的叠加,所以在用它们对信号与系统进行分析时,其着眼点几乎总是在“不同频率”上,因而这种分析方法称为频域分析法。

### 3.1 任意信号分解为正交函数

第2章内容可以概括为求解任意信号作用于LTI系统的时域响应问题。解决的方法就是以冲激信号为基本信号,将任意信号分解成无穷多个不同时刻、不同强度的冲激信号的叠加。以冲激响应为基本响应,将系统响应表示为不同延时、不同强度的冲激响应的叠加(卷积积分)。

这就涉及基本信号的选取。在频域分析中,根据什么原则来选择作为任意信号分解分量的基本信号,怎样一个函数集合才能完全表示任意的信号呢?

数学上对任意函数进行分解,必须保证有一个可以表示该函数的完备的正交函数集。如果将此用于信号分解上,则可以说一个完备的正交函数集构成了信号空间,在这个空间中任意信号可以用这样一完备正交信号集合来表示。在常用函数中完备的正交的函数集有很多种,如三角函数集、虚指数函数集、切比雪夫多项式的集合、沃尔什函数集,等等。本章为了讨论连续时间信号,下面将引入完备的正交三角函数集和虚指数函数集,用这些基本的函数来完成任意信号的分解,从而建立频谱的概念,同时解决连续时间信号的时频之间的变换。

### 3.2 周期信号的傅里叶级数

傅里叶级数的理论为周期信号的分解给出了严格的数学证明。按照傅里叶级数理论,任何一个周期为 $T$ 的周期信号,可以在一个完备的正交信号集上分解,即傅里叶展开,正交分解的信号应满足下述狄里赫勒(Dirichlet)条件:即在 $(t_0, t_0 + T)$ 区间有定义,并且

(1)  $x(t)$  绝对可积,即  $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$ ;

(2)  $x(t)$  的极大值和极小值的数目应有限;

(3)  $x(t)$  如有间断点,间断点的数目应有限。

以下的分析假定信号满足上述条件,这些条件是符合绝大多数实际情况的。三角函数信号



集和虚指数信号集是完备的正交信号集,故此我们给出周期信号的这两种形式的分解:三角形和指数形式的傅里叶级数。

### 3.2.1 三角函数形式的傅里叶级数

周期为  $T$  的信号  $x(t)$ ,可以在任意  $(t_0, t_0 + T)$  区间,用三角函数信号集  $\{\sin k\omega_0 t, \cos k\omega_0 t, 1; k = 1, 2, \dots; \omega_0 = 2\pi/T\}$  精确分解为下面的三角形形式的傅里叶级数,即

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \quad (3.1)$$

式中  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,称为基波频率,简称基频。

上式中展开系数可由数学知识三角函数信号集的正交性得出:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (3.2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (3.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega_0 t dt \quad (3.4)$$

式中,  $a_0$ 、 $a_k$ 、 $b_k$  分别代表了信号  $x(t)$  的直流分量、余弦分量和正弦分量的振荡幅度。

在式(3.1)中,同频率的正余弦项可以合并,从而该式又可变形为

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (3.5)$$

其中

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \tan \varphi_k = -\frac{b_k}{a_k} \end{cases}$$

$c_0$  为周期信号的平均值,它是周期信号  $x(t)$  中包含的直流分量;而式(3.5)中当  $k=1$  时,即为  $c_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ ,称此为一次谐波或基波,它的频率与基波频率相同;当  $k=2$  时,即为  $c_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$ ,称此为二次谐波,它的频率是基波频率的二倍;依次类推,  $c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$  称为  $k$  次谐波,而相应的  $c_k$  为  $k$  次谐波分量的振幅;  $\varphi_k$  为  $k$  次谐波分量的初始相位。

式(3.1)和式(3.5)所具有的物理含义是相同的,都表明了任意周期信号都可以分解为直流分量和各次谐波分量之和,而作为各次谐波分量的频率是基波频率的整数倍。

**【例 3.2.1】** 求图 3.1 所示周期为  $T$  的矩形脉冲信号的傅里叶级数。

**解:** 该信号  $x(t)$  的周期为  $T$ ,基频为  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,它在一个周期  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  内的表达式为

$$x(t) = \begin{cases} E, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

按式(3.1)将  $x(t)$  展开,由式(3.2)、式(3.3)和式(3.4)有

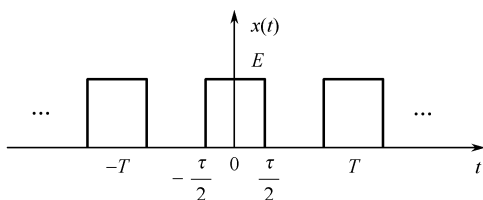


图 3.1 周期矩形脉冲信号

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E dt = \frac{E\tau}{T} \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E \cos k \frac{2\pi}{T} t dt \\
 &= \frac{2E}{k\pi} \sin \frac{k\pi\tau}{T} = \frac{E\tau\omega_0}{\pi} \text{Sa} \left( \frac{k\omega_0\tau}{2} \right) = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa} \left( \frac{k\omega_0\tau}{2} \right) \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E \sin \frac{2\pi}{T} t dt = 0
 \end{aligned}$$

于是  $x(t)$  的傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{E\tau}{T} + \frac{2E\tau}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Sa} \left( \frac{k\omega_0\tau}{2} \right) \cos k\omega_0 t$$

由例 3.2.1 题可以看出:周期信号的傅里叶展开式都需要经过积分运算才能确定傅里叶系数。显然当信号比较复杂时,将给周期信号分解带来一定的困难。通常可以通过信号的奇偶性来简化积分运算。

(1) 若周期信号为偶信号,即  $x(-t) = x(t)$ ,可以证明这类信号的傅里叶系数为

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\
 b_k &= 0
 \end{aligned}$$

则对应傅里叶级数展开式为

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t \quad (3.6)$$

于是信号的傅里叶级数不含正弦项,只含余弦项和直流项。图 3.2 所示的信号经计算可得傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left[ \cos \omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 t + \cdots \right]$$

其中不含正弦项。

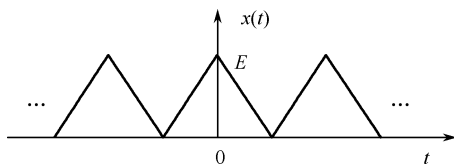


图 3.2 偶信号

(2) 若周期信号为奇信号,即  $x(-t) = -x(t)$ ,也可证明这类信号的傅里叶系数为:

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

则对应傅里叶级数展开式为

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t \quad (3.7)$$

可见奇信号的傅里叶级数中不含直流项和余弦项,只含正弦项。例如,图 3.3 所示信号为奇信号,经计算其信号的傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{E}{\pi} \left[ \sin\omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \cdots \right]$$

其中不含余弦项和直流项。

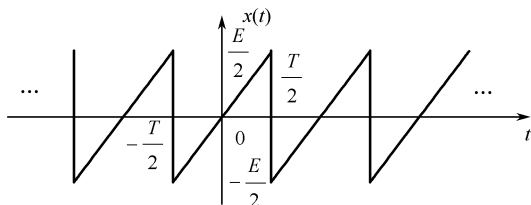


图 3.3 奇信号

(3) 若周期信号为半波像对称信号,即

$$x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$$

从图 3.4 所示的图形上看,信号波形沿时间轴平移半个周期,并上下翻转得出的波形与原波形重合,则傅里叶系数为

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 x(t) \cos k\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} x\left(t - \frac{T}{2}\right) \cos k\omega_0 \left(t - \frac{T}{2}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

又因为

$$x\left(t - \frac{T}{2}\right) = -x(t)$$

$$\cos k\omega_0 \left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \cos k\omega_0 t, & k = 2, 4, 6, \cdots \\ -\cos k\omega_0 t, & k = 1, 3, 5, \cdots \end{cases}$$

可得出

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 2, 4, 6, \cdots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt, & k = 1, 3, 5, \cdots \end{cases} \quad (3.8)$$

类似又可得出

$$b_k = \begin{cases} 0, k = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.9)$$

则对应傅里叶级数展开式为

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (3.10)$$

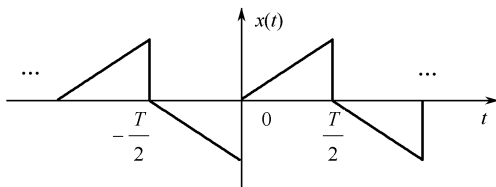


图 3.4 奇谐信号

可见,在半波像对称信号的傅里叶级数中,只含有奇次谐波项( $\omega = k\omega_0, k = 1, 3, 5, \dots$ ),不含偶次谐波项( $\omega = k\omega_0, k = 0, 2, 4, \dots$ ),故半波像对称信号又称为奇谐信号。

(4) 若周期信号是半波对称信号,即

$$x(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$$

就是其波形平移半个周期后所得出的波形与原波形重合,(如图 3.5 所示)。这类函数的傅里叶系数为:

$$a_k = \begin{cases} 0, k = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt, & k = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (3.11)$$

$$b_k = \begin{cases} 0, k = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt, & k = 0, 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.12)$$

则对应傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad k = 0, 2, 4, \dots \quad (3.13)$$

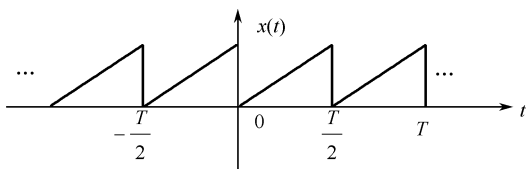


图 3.5 半波对称信号

可见,当周期信号波形具有某种对称性时,其傅里叶级数中有些项就不出现。掌握傅里叶级数的这一特点,就可以迅速判断信号中包含哪些谐波成分,从而简化系数的计算。另外,有些信号经简单处理也可能具有对称性,这时就可利用信号的潜在对称性进行简化分析。如图 3.6 中的信



即周期为  $T$  的信号  $x(t)$ , 可以在任意  $(t_0, t_0 + T)$  区间, 在虚指数信号集  $\{e^{jk\omega_0 t}; \omega_0 = 2\pi/T; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  上分解为一系列不同频率的虚指数信号  $e^{jk\omega_0 t}$  之和, 即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.15)$$

式中  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , 展开系数  $X_k$  为傅里叶复系数, 也称复振幅。

式(3.14)表明复振幅  $X_k$  的模为实振幅  $c_k$  的一半, 而幅角与第  $k$  次谐波的初始相位相等。由式(3.14)有

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{c_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{2} (c_k \cos \varphi_k + j c_k \sin \varphi_k) \\ &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

即

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.16)$$

三角形式的傅里叶级数物理含义比较明确, 但由式(3.15)可以看出, 指数形式的傅里叶级数比三角形式的傅里叶级数更为简单, 尤其是在系数计算上。表 3.1 综合了三角形式和指数形式傅里叶级数及其系数之间的关系。

表 3.1 周期信号展开为傅里叶级数

形式	展开式	傅里叶系数	系数间关系
指数形式	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$ $X_k =  X_k  e^{j\varphi_k}$	$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$X_k = \frac{c_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{2} (a_k - j b_k)$ $ X_k  = \frac{1}{2} c_k = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ <p>是 <math>k</math> 的偶函数</p> <p><math>\varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}</math> 是 <math>k</math> 的奇函数</p>
三角形式	$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t$ $= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$	$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega_0 t dt$ $k = 0, 1, 2, \dots$ $b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega_0 t dt$ $k = 1, 3, \dots$ $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\tan \varphi_k = \frac{-b_k}{a_k}$	$a_k = c_k \cos \varphi_k$ $b_k = -c_k \sin \varphi_k$ $c_k = 2  X_k $

【例 3.2.2】 试求例 3.2.1 所示周期信号的指数形式的傅里叶级数。

解:  $\omega_0 = 2\pi/T$

由式(3.16)有

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{E}{k\pi} \sin\left(\frac{k\omega_0 \tau}{2}\right) \\ &= \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0 \tau}{2}\right) \end{aligned}$$

再由式(3.15)可得  $x(t)$  的指数形式的傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{E\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0 \tau}{2}\right) e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

### 3.2.3 周期信号的频谱

#### 3.2.3.1 频谱的概念

式(3.13)的三角函数形式的傅里叶级数指出,一个周期信号  $x(t)$  可以表示为频率为0(直流),  $\omega_0, 2\omega_0, \dots, k\omega_0, \dots$  的正弦信号之和,它们的振幅和相位分别是  $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$  和  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$ 。可以很容易画出幅度  $c_k$  对于  $k$  和  $\varphi_k$  对于  $k$  的图。

由于  $k$  是正比于  $k\omega_0$  的,所以这两个图也就是  $c_k$  对于  $\omega$  和  $\varphi_k$  对于  $\omega$  的图,前者称为**振幅谱**,也称**幅度谱**;后者称为**相位谱**,合起来称为周期信号  $x(t)$  的**频谱图**。从这个频谱图一眼就看出信号  $x(t)$  所包含的频率分量,以及它们的振幅大小和相位。知道了这些参量就能按式(3.5)重构或合成信号  $x(t)$ 。因此,频谱是描述一个周期信号  $x(t)$  的另一种形式,它在所有方面与  $x(t)$  作为  $t$  的波形图都是等价的。一个信号的频谱构成了  $x(t)$  的频域描述,与此对应的是  $x(t)$  用时间函数表征的时域描述。

一般来说,频谱图需要根据信号的傅里叶级数展开式的结果画出。在频谱图中,代表各谐波分量振幅和相位的垂线称之为谱线,每一根谱线所在位置的  $k\omega_0$  值即为该次谐波的角频率。例 3.2.1 题的周期矩形脉冲信号,所对应的振幅和相位谱如图 3.7 所示。

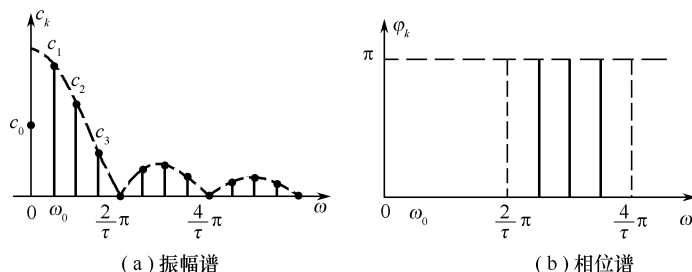


图 3.7 周期矩形脉冲信号的频谱图

图中连接各谱线顶点的虚线称为谱包络线,用它来描述周期信号各次谐波分量振幅和相位随频率变化的情况。

在三角函数形式的傅里叶级数展开式中,  $k$  只能取正整数,故其振幅及相位仅在频谱图的右半平面,称此为**单边谱**。而指数形式傅里叶级数的展开式中,  $k$  可以取任何整数,对应的频谱图称为**双边谱**。值得注意的是,指数形式傅里叶级数中出现了负频率项,这只是表达形式的问题,并不表示真正存在以负频率进行振荡的分量,负频率项与相应的正频率项联合起来,才代

表一个谐波分量,单独考虑正频率项或者单独考虑负频率项都是不完全的。

【例 3.2.3】 已知傅里叶级数展开式为

$$x(t) = 2 + 6\cos(10\pi t - \pi/4) + 4\sin(30\pi t)$$

试画出  $x(t)$  的频谱图。

解:首先将表达式中的各频率分量用统一的余弦函数表示,即为

$$x(t) = 2 + 6\cos(10\pi t - \pi/4) + 4\cos(30\pi t - \pi/2)$$

可见  $x(t)$  是周期信号,基波角频率为  $\omega_0 = 10\pi$ ,基波周期为  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}$ 。

当  $k=0$ (直流分量)时的振幅为: $c_0 = X_0 = 2, \varphi_0 = 0$

当  $k=1$ (一次谐波)时的振幅为: $c_1 = 6, \varphi_1 = -\pi/4$

复振幅为: $|X_1| = \frac{c_1}{2} = 3, \varphi_1 = -\pi/4; |X_{-1}| = 3, \varphi_{-1} = \pi/4$

当  $k=2$ (二次谐波)时,为零,即不含二次谐波分量;

当  $k=3$ (三次谐波)时的振幅为: $c_3 = 4, \varphi_3 = -\pi/2$

复振幅为: $X_3 = \frac{c_3}{2} = 2, \varphi_3 = -\pi/2; |X_{-3}| = 2, \varphi_{-3} = \pi/2$

由此可画出周期信号  $x(t)$  的单边谱,如图 3.8(a) 所示,双边谱如图 3.8(b) 所示。

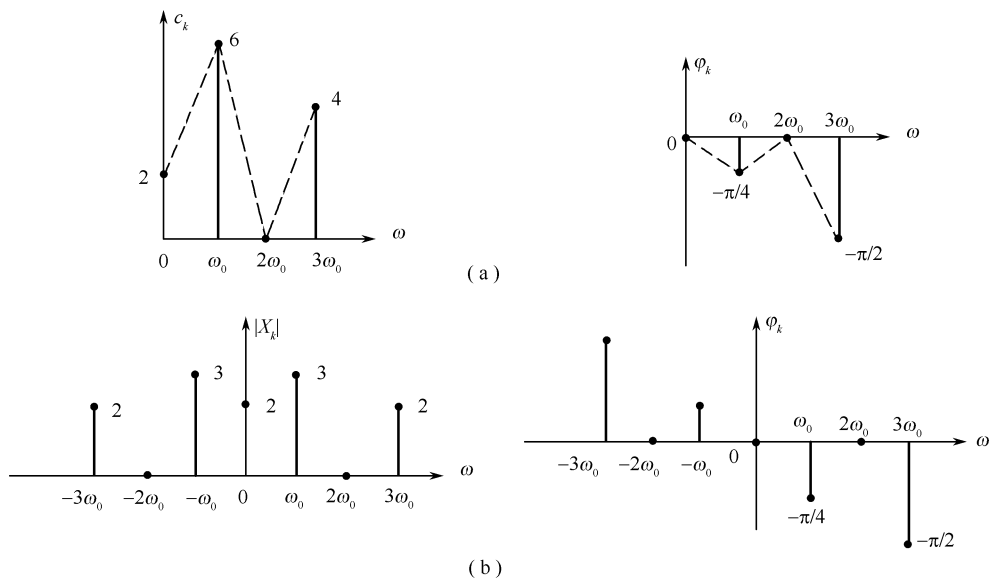


图 3.8 周期信号的单边谱和双边谱

### 3.2.3.2 周期信号的频谱分析

下面以周期矩形脉冲信号为例,分析周期信号的频谱特性。

设有周期矩形脉冲信号,脉冲宽度为  $\tau$ ,幅度为  $E$ ,周期为  $T$ ,如图 3.1 所示。

$x(t)$  在一个周期内  $(-T/2 < t < T/2)$  的表达式为

$$x(t) = \begin{cases} E & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



利用式(3.13)可得其复振幅为

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2E}{Tk\omega_0} \sin \frac{k\omega_0 \tau}{2} = \frac{E\tau}{T} \text{Sa} \frac{k\omega_0 \tau}{2} \end{aligned}$$

式中,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。

若  $T = 4\tau$ , 周期矩形脉冲信号的振幅谱和相位谱如图 3.9 所示。该信号的  $\varphi_k$  取值为 0 或  $\pm\pi$ , 因此可以将图 3.9(a)、(b) 合成为图 3.9(c)。如果  $\varphi_k$  取值不仅仅为 0 或  $\pm\pi$ , 则不能合成为一个图像。谱包络与横轴的交点为  $k\omega_0 = 2m\pi/\tau, m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , 常把  $m = 1$  时的第一个零点到原点的频率范围称为周期矩形脉冲信号的主瓣宽度, 即  $2\pi/\tau$ 。谱线间隔  $\omega_0 = 2\pi/T$ ; 主瓣宽度含谱线个数为  $N = T/\tau$ 。

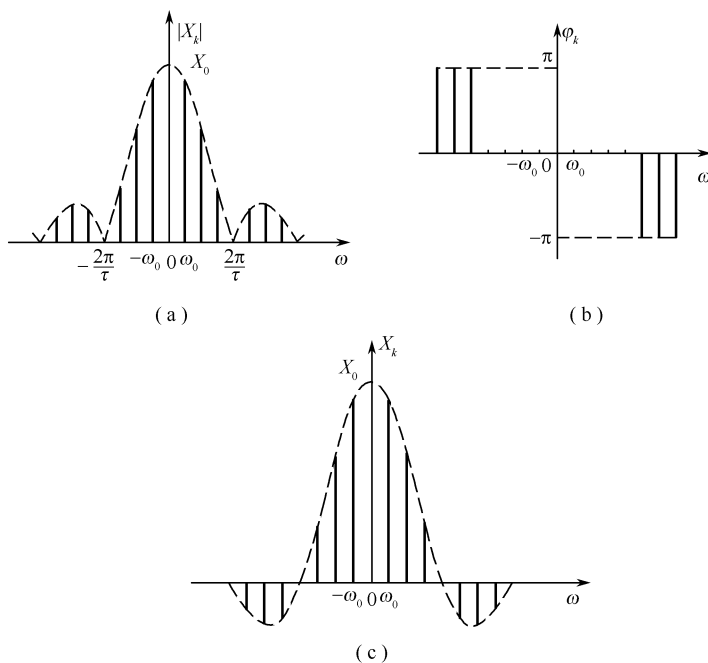


图 3.9 周期矩形脉冲信号的双边频谱

当信号幅度  $E$  和宽度  $\tau$  保持不变, 而重复周期  $T$  变化时, 若  $T$  增大, 则频率主瓣高度  $E\tau/T$  减小, 各条谱线高度也相应地减小; 谱包络的第一个零点  $\pm 2\pi/\tau$  不变, 频率主瓣宽度不变; 各谱线间隔  $\omega_0 = 2\pi/T$  减小, 谱线变密, 因而频率主瓣内包含的谱线数增加。若  $T$  减小, 则情况相反。图 3.10 是当  $E = 1, \tau = 0.1\text{s}$  保持不变, 而  $T$  分别为  $1/2\text{s}, 1\text{s}, 2\text{s}$  三种情况下的频谱图。

当信号幅度  $E$  和重复周期  $T$  保持不变, 而宽度  $\tau$  变化时, 若  $\tau$  减小, 则频率主瓣高度  $E\tau/T$  减小, 各条谱线高度也相应地减小, 频谱包络的第一个零点  $\pm 2\pi/\tau$  增大, 因而频率主瓣内包含的谱线数目增多。若  $\tau$  增大, 则情况相反。图 3.11 是当  $E = 1, T = 0.5\text{s}$  保持不变, 而  $\tau = 1/2\text{s}, 1/20\text{s}$  和  $1/40\text{s}$  三种情况下的频谱图。我们注意到, **矩形脉冲信号的频率主瓣宽度与脉冲宽度成反比**, 这是一个十分重要的关系。当  $\tau$  增大到  $\tau = T$  时有

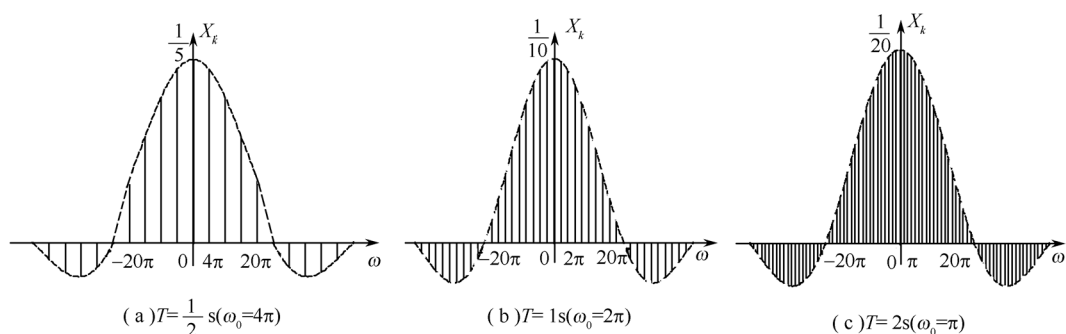


图 3.10 周期矩形脉冲的频谱与周期的变化关系

$$X_k = \begin{cases} E, & k = 0 \\ ESa(k\pi), & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

也就是说只在零频( $\omega = 0$ )处出现一条高度为 $E$ 的谱线。事实上此时的周期矩形脉冲信号已转化为直流信号了,其频谱自然只包含直流分量。

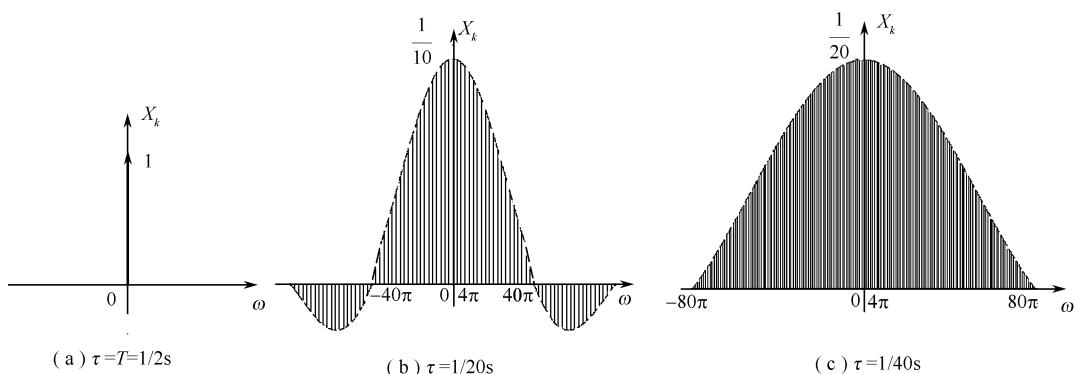


图 3.11 周期矩形脉冲的频谱与脉宽的关系

### 3.2.3.3 周期信号的功率谱

周期信号  $x(t)$  是功率有限信号,由 2.4 节知其平均功率  $P$  为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (3.18)$$

而该式中  $x(t)$  为任意周期信号,它满足傅里叶级数,即  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$ ,将此式代入式(3.18)中可得

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* dt \quad (3-19a)$$

交换求和与积分的顺序,式(3.19)有

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \cdot X_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad (3.19b)$$

式(3.19b)也可用三角形式的傅里叶系数来表示,即

$$P = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 = c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{c_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (3.19c)$$

式(3.19b)和式(3.19c)称为功率有限信号的帕塞瓦尔等式,它从功率的角度揭示了周期信号的时间特性和频率特性之间的关系,即周期信号的平均功率等于直流分量与各次谐波平均功率之和。

式(3.19c)中,  $c_0^2$  是信号所含直流分量的功率,  $(c_k/\sqrt{2})^2$  是  $k$  次谐波分量的功率。 $c_0^2$ ,  $(c_k/\sqrt{2})^2$  与  $k\omega_0$  ( $k=1,2,\dots$ ) 的关系称为周期信号的**单边功率谱**,而  $|X_k|^2$  与  $k\omega_0$  ( $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ ) 的关系则称为周期信号的**双边功率谱**。周期信号的功率谱表明了其平均功率在各次谐波频率上的分配情况,功率谱只由振幅谱决定,与相位谱无关。

**【例 3.2.4】** 设图 3.1 所示的周期矩形脉冲信号中,  $E=1$ ,  $T=\frac{1}{4}\text{s}$ ,  $\tau=\frac{1}{20}\text{s}$ , 求频带  $(0, \frac{2\pi}{\tau})$  内各谐波功率之和占信号总平均功率的比例。

**解:** 该信号的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2 dt = 4 \int_{-\frac{1}{40}}^{\frac{1}{40}} dt = 0.2000$$

由 3.2.3 节得出的结果,该信号的基频为  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 8\pi$ , 频带  $(0, \frac{2\pi}{\tau}) = [0, 40\pi]$  内共有 5 条谱线,各谐波功率之和为

$$\begin{aligned} P' &= |X_0|^2 + 2\{|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2\} \\ &= \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^2} \left\{ \text{Sa}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^2} (0.8757 + 0.5728 + 0.2546 + 0.0547) = 0.1806 \end{aligned}$$

所以  $\frac{P'}{P} = \frac{0.1806}{0.2000} \approx 90\%$

### 3.2.3.4 有效频带

从例 3.2.4 题可见,周期信号的功率主要集中在低频段,因此,我们通常把信号中从零频率(直流)到所需考虑的最高频率的频率范围叫做信号所占有的有效频带。记作  $B_\omega$  (rad/s) 或  $B_f$  (Hz)。至于到底应该考虑到哪一次谐波,工程上有时用从零频率开始到幅度谱下降为谱包络最大值的某个百分数(如 10%)作为标准,有时用从零频率开始到某次谐波止的平均功率不小于周期信号平均功率的某个百分数(比如 90%)作为标准。工程实际中,这些百分数要视具体要求选定。

在例 3.2.4 题中,周期矩形脉冲信号的  $[0, 40\pi]$  频带内的谐波功率之和占总平均功率的 90%,因此,如果在对周期矩形脉冲信号进行处理时,允许有 10% 的功率损失,则以  $[0, 40\pi]$  作为该信号的有效频带是可以的。

从以上的周期矩形脉冲的频谱分析,可以看出对于一般的周期信号其频谱都具有以下特点:

(1) 频谱由离散的谱线组成,周期信号的频谱是离散谱,即具有离散性;

(2) 在频谱图上谱线是以  $\omega_0$  为间隔等距离分布的,每一条谱线仅代表一个谐波分量,因而周期信号频谱具有谐波性;

(3) 谱线振幅随  $n$  增大而逐渐衰减至零,所以周期信号的频谱具有收敛性。

频谱的这三个特点:离散性、谐波性和收敛性,也是满足狄里赫勒条件的周期信号的频谱所共有的特点。

### 3.2.4 LTI 系统对周期信号的响应

周期信号可以分解成傅里叶级数,这就给任意周期信号输入 LTI 系统之后的响应求解提供了又一种可行的办法。考虑一个单位冲激响应为  $h(t)$  的 LTI 系统对简谐振荡信号  $e^{j\omega t}$  的响应。由第 2 章可知,系统的输出为

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{j\omega t} * h(t) = h(t) * e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中  $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  只与频率  $\omega$  有关,而与时间无关,通常把它记为  $H(j\omega)$ ,即

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.21)$$

下面将会看到,  $H(j\omega)$  就是单位冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换,称为系统的频率响应。于是,式(3.20)可写为

$$y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega) \quad (3.22)$$

按式(3.22),当给系统输入  $e^{jk\omega_0 t}$  时,系统的输出为  $H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ ,故当系统输入任意的周期信号  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$  时,系统的输出应为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (3.23)$$

就是说,系统的输出  $y(t)$  具有傅里叶级数的形式,因此也是一个与输入同周期的周期信号。

**【例 3.2.5】** 一个 LTI 系统的单位冲激响应为  $h(t) = e^{-t}u(t)$ ,求它对正弦信号  $x(t) = \sin\omega_0 t$  的响应。

**解:** 此题当然可以直接按第 2 章所述的卷积积分法求解,但这里将提供频域解法。

按式(3.21),该系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-\tau} u(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{1+j\omega}$$

而  $x(t) = \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$ ,所以按式(3.23)可得系统响应为

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{2j} \frac{1}{1+j\omega_0} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1-j\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \\
 &= \frac{-\omega_0}{1+\omega_0^2} \cos\omega_0 t + \frac{1}{1+\omega_0^2} \sin\omega_0 t
 \end{aligned}$$

**【例 3.2.6】** 求单位冲激响应为  $h(t) = e^{-t}u(t)$  的 LTI 系统对图 3.1 所示周期矩形脉冲信号的响应。

**解:** 由例 3.2.5 题可知,该系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

由 3.2.3 节可知 
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

根据式(3.23) 可得系统响应为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+jk\omega_0} \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

### 3.3 非周期信号的傅里叶变换

到目前为止,只研究了周期信号,应用的运算和分析工具是傅里叶展开。非周期信号是另一类重要信号,但由于非周期信号的波形在有限长的时间段内不能重复出现,不能像周期信号那样以一段时间(一个周期)内的傅里叶展开式代表整个信号,从而需要我们采用不同的方法来分析非周期信号的频域特性,这就是傅里叶变换方法。

#### 3.3.1 傅里叶变换的导出

在前面 3.2.4 节中,我们以周期矩形脉冲信号为例,研究了周期信号频谱与波形参数的关系。很清楚地表明谱线的密度和幅度均与信号的周期有关,周期愈大,谱线愈密而幅度愈小。当信号周期无限增大时,其谱线间隔与谱线幅度都趋于无穷小,这样原来离散谱就变成了连续谱。但因谱线幅度都是无穷小量,则谱线相应消失,但可以想象,此时谱线中各频率分量将保持一定的比例关系,只是由于幅度太小,画不出来而已。事实上,当周期无限增大时,周期信号已变成非周期信号。这说明非周期信号与周期信号两者的频谱特性之间有联系,但又有很大不同。

设任意周期信号  $x_T(t)$ ,其傅里叶级数指数形式的展开式为

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.24)$$

其中傅里叶系数为

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.25)$$

将式(3.25) 两端同乘信号的周期  $T$ ,可得

$$TX_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.26)$$

当周期  $T \rightarrow \infty$  时,其周期信号  $x_T(t)$  将过渡到非周期信号  $x(t)$ ,即

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) \quad (3.27)$$

当  $T \rightarrow \infty$  时, 有  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega, k\omega_0 \rightarrow \omega$ , 这意味着不连续变量变为连续变量, 离散谱变为连续谱。此时式(3.26) 可变为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} TX_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

此时等式右边积分后为  $j\omega$  的函数, 记作  $X(j\omega)$ , 即

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.28)$$

$X(j\omega)$  的量纲应与幅度和周期乘积极限的量纲相同, 或与幅度除以频率的极限量纲相同。这就表明  $X(j\omega)$  描述的是单位频带的复振幅, 所以将  $X(j\omega)$  称为“**频谱密度函数**”, 简称“**频谱函数**”或“**频谱**”。

以上讨论的是已知时间函数求频谱的过程, 反过来也可以已知频谱求时间函数。由式(3.24) 可得

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T}{T} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.29)$$

当  $T \rightarrow \infty$  时, 有  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega, k\omega_0 \rightarrow \omega, TX_k \rightarrow X(j\omega), \frac{1}{T} \rightarrow \frac{1}{2\pi} d\omega$ , 原来离散求和变成连续积分。将这些极限关系代入式(3.29) 中, 得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.30)$$

式(3.28) 是已知  $x(t)$  求  $X(j\omega)$ , 称为傅里叶正变换; 式(3.30) 是已知  $X(j\omega)$  求  $x(t)$ , 称为傅里叶反变换, 可简记为

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \mathcal{F}[x(t)] \\ x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] \end{aligned}$$

二者的关系也可记作  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 双箭头“ $\leftrightarrow$ ”表示对应关系, 说明时域信号  $x(t)$  与频域频谱  $X(j\omega)$  是一对傅里叶变换对。

从式(3.28) 可见,  $X(j\omega)$  是关于  $\omega$  的复函数, 因此可写成如下形式:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \quad (3.31)$$

其中  $|X(j\omega)|$  是  $X(j\omega)$  的模, 它表示信号中各频率分量的相对大小,  $\angle X(j\omega)$  是  $X(j\omega)$  的相位, 表示信号中各频率分量之间的相位关系。把  $|X(j\omega)|$  和  $\angle X(j\omega)$  随  $\omega$  的变化规律分别称为信号的**幅频特性**和**相频特性**, 把相应的频谱图称为**幅度频谱图**和**相位频谱图**, 二者合称**频谱图**。

将式(3.31) 代入式(3.30) 中, 可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| e^{j[\omega t + \angle X(j\omega)]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| \cos[\omega t + \angle X(j\omega)] d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| \sin[\omega t + \angle X(j\omega)] d\omega \right\} \end{aligned}$$

当  $x(t)$  为实函数时,  $|X(j\omega)|$  和  $\angle X(j\omega)$  分别是  $\omega$  的偶函数和奇函数,那么上式的第二个积分为零,于是有

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)| \cos[\omega t + \angle X(j\omega)] d\omega \quad (3.32)$$

上式表明,一个非周期实信号,可以分解为定义在  $-\infty < \omega < \infty$  范围的无穷多个正弦信号的连续和(积分),各频率分量连续地分布在  $0 \sim \infty$  的一切频率上,振幅  $\frac{|X(j\omega)|}{\pi} d\omega$  是无穷小量,而无穷多个无穷小量可合成一个振幅有限的信号。

我们注意到,按式(3.28)求信号的傅里叶变换需要作无穷积分,因而存在积分能否收敛的问题。与傅里叶级数情况一样,满足狄里赫勒(Dirichlet)条件,即在无限区间内  $x(t)$  绝对可积是信号可以按式(3.28)进行傅里叶变换的充分条件。

### 3.3.2 常用信号的傅里叶变换

我们将根据式(3.28)对一些常用信号进行傅里叶变换,以方便后续复杂信号的傅里叶变换分析之用。

#### 3.3.2.1 单边指数信号的频谱

单边指数信号的表达式为

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad \alpha > 0$$

将上式代入式(3.28),有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

即

$$e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + \alpha} \quad \alpha > 0 \quad (3.33)$$

由于所得频谱是复函数,故有

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad \angle X(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$

其时域波形图及频谱图如图 3.12 所示。

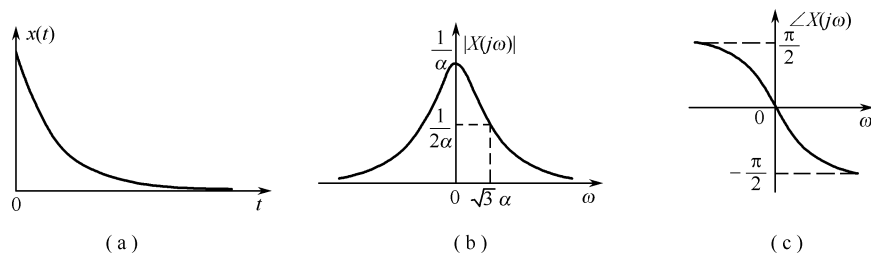


图 3.12 单边指数信号及其频谱

#### 3.3.2.2 矩形脉冲信号的频谱

矩形脉冲信号又称门信号,其表达式为

$$G_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

将上式代入式(3.28),有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t} dt = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

即

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3.34)$$

由于上式中  $X(j\omega)$  是个实函数,故不必分别画幅度频谱图和相位频谱图,直接画在一幅图上即可,如图 3.13(b) 所示。矩形脉冲频域分解式为

$$x(t) = EG_{\tau}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega t} d\omega$$

对比图 3.13(b) 和图 3.10 可以具体看出,矩形脉冲信号的频谱密度函数与周期矩形脉冲信号的谱包络形状是相同的。

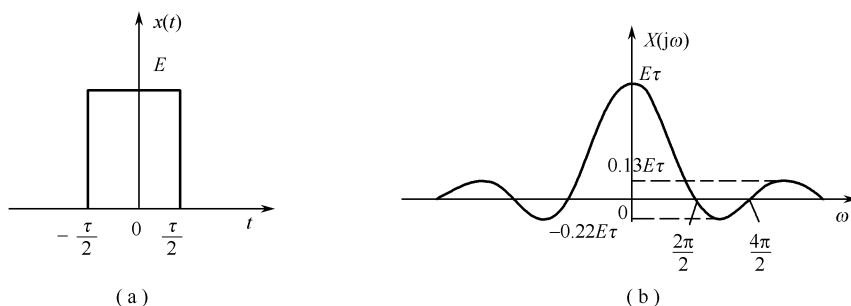


图 3.13 矩形脉冲信号及其频谱

### 3.3.2.3 单位冲激信号的频谱

将  $\delta(t)$  代入式(3.28),有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

即

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (3.35)$$

$\delta(t)$  的频域分解式为

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (3.36)$$

$\delta(t)$  及其频谱如图 3.14 所示。

从图 3.14 可见,单位冲激信号  $\delta(t)$  只出现在  $t=0$  时刻,但却包含了从  $-\infty \sim \infty$  所有频率成分,且各频率分量的(相对)大小是相同的,故  $\delta(t)$  的频谱称为“白色谱”。

### 3.3.2.4 单位阶跃信号的频谱

单位阶跃信号  $u(t)$  不满足绝对可积条件,不能直接通过式(3.28)求其傅里叶变换。事实上该信号的频谱是存在的,可采用极限的方法求得。



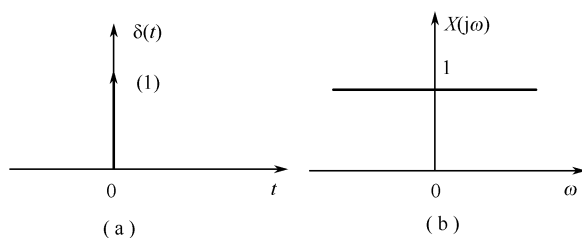


图 3.14 单位冲激信号及其频谱

将单位阶跃信号看作是单边指数信号在  $\alpha \rightarrow 0$  时的极限,即

$$u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

利用式(3.33)的结果,可有

$$e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

上式两边同时取极限,有

$$u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} u(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{j\omega}$$

其中

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} \infty & \omega = 0 \\ 0 & \omega \neq 0 \end{cases}$$

显然这一结果符合冲激函数的定义,其冲激强度应为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\frac{\omega}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi \end{aligned}$$

所以

$$u(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3.37)$$

其时域波形图及频谱图如图 3.15 所示。

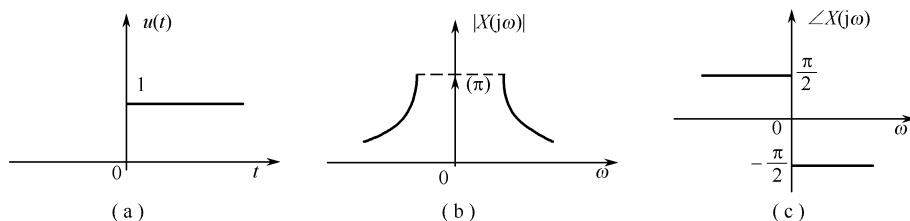


图 3.15 单位阶跃信号及其频谱

由上述分析可见,尽管  $u(t)$  不满足绝对可积条件,但通过取极限并引入奇异函数  $\delta(\omega)$ ,仍可以找到它的傅里叶变换,这使我们又一次看到了奇异信号在信号分析理论中的重要作用。 $u(t)$  的频谱在  $\omega = 0$  处有冲激,是因为  $u(t)$  含有明显的直流成分,但它不是纯直流,故还有其他高频分量。

### 3.3.3 傅里叶变换的性质

傅里叶变换揭示了时域信号  $x(t)$  和与之对应的频域频谱  $X(j\omega)$  的内在联系。它说明了信号既可用时域表示又可用频域表示。本节主要讨论傅里叶变换的性质,这些性质将从不同的角度揭示信号时域变化与频域相应变化间的关系,同时也为求解复杂信号的频谱提供了一种更为简捷的方法。

#### 3.3.3.1 奇偶特性

(1) 偶信号的频谱是偶函数,奇信号的频谱是奇函数。

证明:由于

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

若  $x(-t) = x(t)$ , 则

$$\begin{aligned} X(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \stackrel{t=-\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(j\omega) \end{aligned}$$

若  $x(t) = -x(-t)$ , 则

$$\begin{aligned} X(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \stackrel{t=-\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = -X(j\omega) \end{aligned}$$

(2) 实信号的频谱是共轭对称函数;其实部是偶函数,虚部是奇函数;幅度频谱是偶函数,相位频谱是奇函数。

当  $x(t)$  为实信号时,其频谱为

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \\ &= \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \end{aligned}$$

其中:

$$\operatorname{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt$$

$$\operatorname{Im}(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

$$|X(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)}$$

$$\angle X(j\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}$$

显然, 频谱  $X(j\omega)$  的实部  $\text{Re}(\omega)$  和幅度谱  $|X(j\omega)|$  是  $\omega$  的偶函数, 频谱  $X(j\omega)$  的虚部  $\text{Im}(\omega)$  和相位谱  $\angle X(j\omega)$  是  $\omega$  的奇函数, 且有  $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ , 即实信号的频谱是共轭对称函数。

### 3.3.3.2 对称特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 则

$$X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (3.38)$$

证明: 由傅里叶反变换定义式有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

则有 
$$x(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

在上式中, 将积分变量  $\omega$  换为  $t$ ,  $t$  换为  $\omega$ , 得

$$x(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

可得 
$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

即 
$$X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

**【例 3.3.1】** 求直流信号  $x(t) = 1$  的频谱。

解: 直流信号不满足绝对可积, 但可以利用式(3.35), 利用对称特性, 有

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

即 
$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (3.39)$$

如图 3.16 所示。纯直流信号只含有零频率成分, 故频谱密度函数必然表现为  $\omega = 0$  处的冲激。

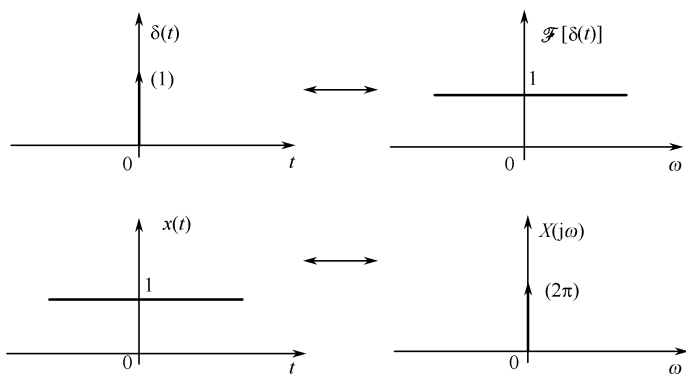


图 3.16 利用对称特性求直流信号的频谱

【例 3.3.2】求  $Sa(\omega_c t)$  的频谱。

解: 尽管  $Sa(\omega_c t)$  满足绝对可积条件, 但直接用定义式计算其频谱, 需做复杂的积分运算。

这时, 可应用对称特性。由式(3.34)可知  $G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ , 从而

$$\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi G_\tau(-\omega) = 2\pi G_\tau(\omega)$$

$$Sa\left(\frac{\tau}{2}t\right) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} G_\tau(\omega), \quad \text{令 } \frac{\tau}{2} = \omega_c$$

$$Sa(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{2\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega) = \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

即

$$Sa(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega) \quad (3.40)$$

其时域波形图及频谱图如图 3.17。

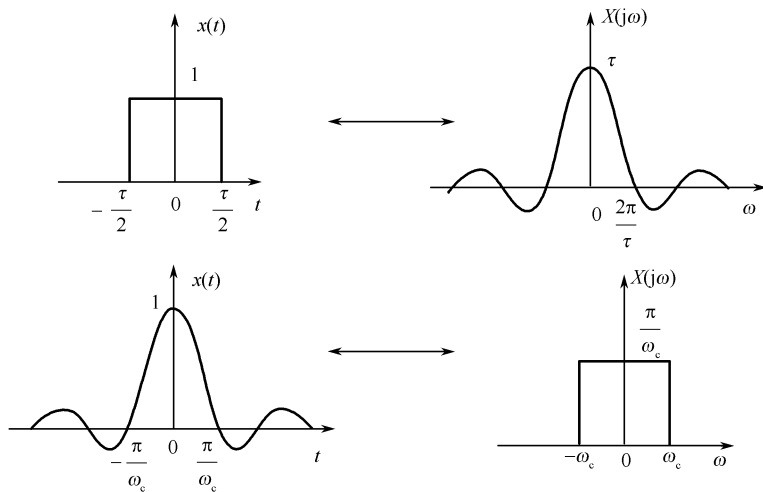


图 3.17 信号  $Sa(\omega_c t)$  的频谱

### 3.3.3.3 时频展缩特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j \frac{\omega}{a}\right) \quad a \neq 0 \quad (3.41)$$

证明:

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

令  $at = \tau$  则

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} \frac{1}{a} d\tau, a > 0 \\ \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} \frac{1}{a} d\tau, a < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, a < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right), a > 0 \\ -\frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right), a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)
 \end{aligned}$$

即 
$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

在式(3.41)中,当 $|a| > 1$ 时,表明将信号 $x(t)$ 在时间坐标轴上压缩为原来的 $1/|a|$ 倍,这时其频谱 $X(j\omega)$ 在频率坐标轴上将扩展为原来 $|a|$ 倍,且其幅度将减小为原来的 $1/|a|$ 。这就是说,在时间域信号波形的压缩( $|a| > 1$ )意味着在频域中信号频带的展宽。反之,信号波形在时域的扩展 $|a| < 1$ ,意味着在频域中频带的压缩。图3.18表示了矩形脉冲及其频谱的展缩情况。

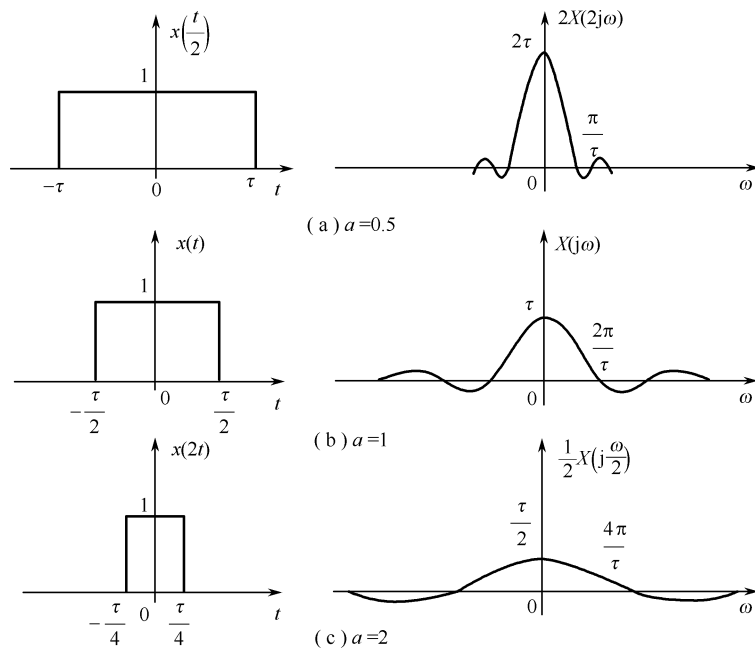


图 3.18 矩形脉冲的时频展缩举例

特例,当 $a = -1$ 时,表明信号在时域的翻转,它对应的频谱在频域中翻转,即

$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega) \quad (3.42)$$

下面运用傅里叶变换的时频展缩特性来求几个信号的频谱。

**【例 3.3.3】** 试求下列信号的频谱：

$$(1) e^{at}u(-t) \quad a > 0 \quad (2) e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \quad a > 0$$

$$(3) \operatorname{sgn}(t) \quad (4) \frac{1}{t}$$

解：由式(3.33)知

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad a > 0$$

由式(3.42),有

$$e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a - j\omega} \quad a > 0 \quad (3.43)$$

由此可得偶对称双边指数信号的频谱：

$$e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (3.44)$$

以及奇对称双边指数信号的频谱：

$$e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (3.45)$$

进一步,由于符号函数

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

可写成如下极限

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

则其频谱为

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega} \quad (3.46)$$

另外,由于  $\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1$ ,而  $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ 。

也可求得

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(t) &\leftrightarrow 2\mathcal{F}[u(t)] - \mathcal{F}[1] \\ &= 2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega} - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

这与式(3.46)是一致的。根据式(3.46)及对称特性,有

$$\frac{2}{j\omega} \leftrightarrow 2\pi\operatorname{sgn}(-\omega)$$

即

$$\frac{1}{t} \leftrightarrow j\pi\operatorname{sgn}(-\omega) = \begin{cases} j\pi, & \omega < 0 \\ -j\pi, & \omega > 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

### 3.3.3.4 时移特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 则

$$x(t + t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{j\omega t_0} \quad (3.48)$$

$t_0$  为任意实数。

证明:

$$\begin{aligned}
 x(t+t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0) e^{-j\omega t} dt \\
 \text{令 } t+t_0 &= \tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau-t_0)} d\tau \\
 &= e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{j\omega t_0} X(j\omega)
 \end{aligned}$$

傅里叶变换的时移特性表明,信号波形在时域的平移,不改变其幅频特性,只改变了相频特性,即各频率产生了与其频率成正比的附加相移。

【例 3.3.4】 求  $\delta(t-t_0)$  ( $t_0$  为任意实数) 的频谱。

解:由式(3.35) 已知  $\delta(t) \leftrightarrow 1$

按时移特性有:  $\delta(t-t_0) \leftrightarrow 1 \cdot e^{-j\omega t_0} = e^{-j\omega t_0}$

【例 3.3.5】 求图 3.19 所示三脉冲信号的频谱。

解:由图 3.19 可得该信号可表示为  $x(t) = EG_{\tau}(t+T) + EG_{\tau}(t) + EG_{\tau}(t-T)$

而由式(3.34) 可知  $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad X(j\omega) &= E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega T} + E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega T} \\
 &= E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) (1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) \\
 &= E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) (1 + 2\cos\omega T)
 \end{aligned}$$

频谱如图 3.19 所示。

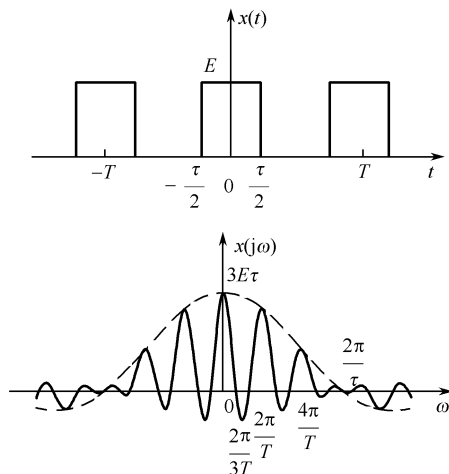


图 3.19 三脉冲信号及其频谱

需要指出的是,对于既时移,又展缩的信号,可先后应用展缩和时移特性来求其频谱。此时有下面的公式。

若  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 则

$$x(at+b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{j\frac{b}{a}\omega}, a \neq 0, a, b \text{ 均为常数} \quad (3.49)$$

### 3.3.3.5 频移特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 则

$$x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega \mp \omega_0)] \quad , \omega_0 \text{ 为常数} \quad (3.50)$$

此性质可由傅里叶变换定义式直接得到。这个性质表明,  $x(t)$  在时域中乘以  $e^{j\omega_0 t}$ , 等效于  $X(j\omega)$  在频域中右移动  $\omega_0$ 。

频移特性在通信技术中有着重要的实际应用,如调制、解调、变频、多路通信等。虽然虚指数信号  $e^{\pm j\omega_0 t}$  无法直接产生,但根据欧拉公式,可以将它们用正余弦信号表示。在通信技术中,就是采用信号  $x(t)$  与  $\cos\omega_0 t$  或  $\sin\omega_0 t$  相乘的方法来实现频谱的搬移。

$$\text{设 } x(t) \leftrightarrow X(j\omega), \text{ 而 } \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}], \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$$

由傅里叶变换的频移特性可得

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\{X[j(\omega + \omega_0)] + X[j(\omega - \omega_0)]\} \quad (3.51)$$

$$x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}\{X[j(\omega + \omega_0)] - X[j(\omega - \omega_0)]\} \quad (3.52)$$

**【例 3.3.6】** 求  $e^{j\omega_0 t}$ ,  $\cos\omega_0 t$  及  $\sin\omega_0 t$  的频谱( $\omega_0$  为任意实数)。

**解:** 由式(3.39)可知  $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

按频移特性有

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3.53)$$

再按欧拉公式及上式有

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.54)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.55)$$

由此看出,具有单一频率的虚指数信号和正余弦信号仅仅在其频率处存在冲激的频谱密度。

**【例 3.3.7】** 求图 3.20 所示矩形调幅信号的频谱。

**解:** 由图 3.21 可得该矩形调幅波可记为

$$x(t) = EG_{\tau}(t)\cos\omega_0 t$$



由式(3.34)知

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

再由式(3.35)可得

$$X(j\omega) = \frac{E\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\tau\right) + \text{Sa}\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right) \right\}$$

矩形调幅信号的频谱如图 3.20 所示。

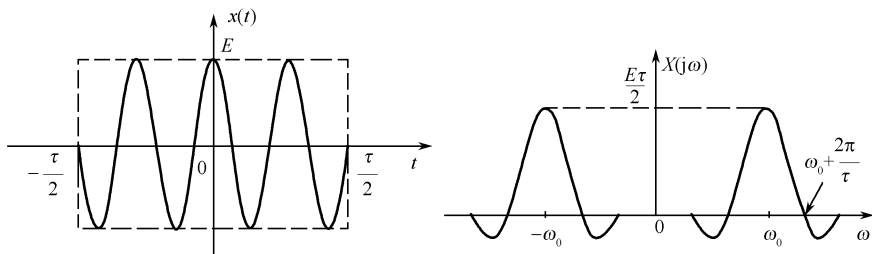


图 3.20 矩形调幅波及其频谱

### 3.3.3.6 时频微分特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 且  $\frac{dx(t)}{dt}$  存在傅里叶变换, 则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega) \quad (3.56)$$

**证明:** 由傅里叶反变换定义有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边对  $t$  微分, 得

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d}{dt}[e^{j\omega t}] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

所以有

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

同样, 若  $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$  的傅里叶变换存在, 重复上述过程可得

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega) \quad (3.57)$$

类似地可以推出频域微分特性。设  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 则

$$tx(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(j\omega) \quad (3.58)$$

$$t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(j\omega) \quad (3.59)$$

**【例 3.3.8】** 求信号  $\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$  及  $\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$  的频谱。

**解:** 由  $\delta(t) \leftrightarrow 1$ , 并根据傅里叶变换时域微分特性可得

$$\begin{aligned}\delta'(t) &\leftrightarrow j\omega \\ \delta^{(n)}(t) &\leftrightarrow (j\omega)^n\end{aligned}$$

【例 3.3.9】 求信号  $x(t) = tu(t)$  的频谱。

解: 由式(3.37)有

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

则由频域微分特性有

$$tu(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

### 3.3.3.7 时域卷积定理

若  $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ ,  $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$ , 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega) \quad (3.60)$$

证明:

$$\begin{aligned}x_1(t) * x_2(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(u) e^{-j\omega u} e^{-j\omega\tau} du \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(u) e^{-j\omega u} du \\ &= X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)\end{aligned}$$

(令  $t - \tau = u$ )

时域卷积定理说明,两个时间信号的卷积运算得到的信号的频谱等于两个时间信号频谱的乘积,即在时域的卷积运算等效于在频域的乘法运算。因而时域卷积定理为卷积积分的计算提供了一种更为简捷的方法。

【例 3.3.10】 如图 3.21 所示,求两个门信号  $x_1(t) = x_2(t) = G_{\tau}(t)$  的卷积积分的频谱。

解: 因为

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

利用时域卷积性质有

$$G_{\tau}(t) * G_{\tau}(t) = \tau\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \left[ \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right] \cdot \left[ \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]$$

即

$$\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3.61)$$

在系统的时域分析中,我们已经知道,系统的零状态响应是输入信号和系统单位冲激响应

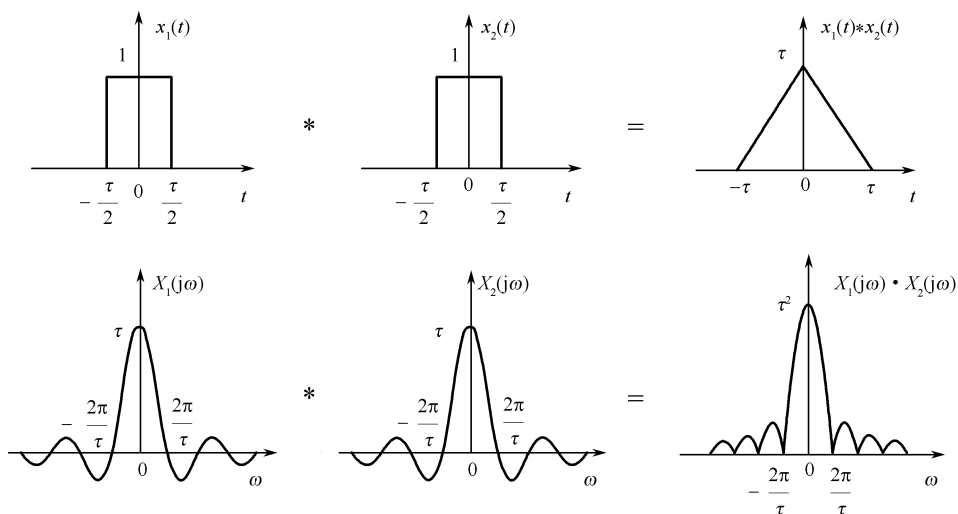


图 3.21 时域卷积等效于频域相乘

的卷积,即

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

根据卷积定理,零状态响应的频谱即是输入信号的频谱与  $h(t)$  的频谱的乘积,即

$$y_{zs}(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

于是,利用卷积定理可求解系统的零状态响应,见例 3.3.11 题。

**【例 3.3.11】** 已知一 LTI 系统的冲激响应  $h(t) = e^{-2t}u(t)$ , 输入为  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ , 试求零状态响应  $y_{zs}(t)$ 。

**解:** 对于 LTI 系统,其零状态响应为:  $y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$

$$\text{已知} \quad e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a} \quad a > 0$$

设  $y_{zs}(t) \leftrightarrow Y_{zs}(j\omega)$ , 利用时域卷积性质有

$$Y_{zs}(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} \cdot \frac{1}{j\omega + 3} = \frac{1}{j\omega + 2} + \frac{-1}{j\omega + 3}$$

$$\text{求其反变换,得} \quad y_{zs}(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

### 3.3.3.8 频域卷积定理

若  $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ ,  $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$ , 则

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega) \quad (3.62)$$

$$\text{式中} \quad X_1(j\omega) * X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) X_2(j\omega - j\lambda) d\lambda$$

$$\text{证明:} \quad x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) X_2(j\omega - j\lambda) d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)
 \end{aligned}$$

这个定理说明,时域的乘法运算等效于频域的卷积运算。在求频谱时,如信号可分解成两信号的乘积,而其中之一的频谱是冲激或冲激串时,使用频域卷积定理更方便。

**【例 3.3.12】** 利用频域卷积定理求信号  $x(t)\cos\omega_0 t$  的频谱,假定  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 。

解:已知

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

根据频域卷积定理有  $x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)]$

$$= \frac{1}{2} [X(j\omega + j\omega_0) + X(j\omega - j\omega_0)]$$

这个结论与式(3.51)是一致的。

### 3.3.3.9 信号能量与频谱的关系

由时域能量信号的定义式  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ , 其中非周期信号  $x(t)$  满足傅里叶反变换,

即  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega_0 t} d\omega$ , 为讨论频域能量信号的表达式,将该式代入能量表达式中有

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \cdot X(j\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

上式称为能量有限信号的帕塞瓦尔等式。它表明,能量有限的非周期信号的总能量等于各频率分量能量之和,每个频率分量的能量为  $\frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi} d\omega$ 。在式(3.63)中,  $|X(j\omega)|^2$  被定义为信号的能量谱密度,简称能量谱,它表示了单位频带所包含的信号能量,单位是焦耳/赫兹(J/Hz)。

显然,时域及频域的能量表达式有

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.64)$$

该式表明信号经过时频变换后,其总能量不变。值得注意的是非周期信号  $X(j\omega)$  具有收敛性,故信号的能量主要集中在低频分量中。

最后将傅里叶变换的性质归纳如表 3.2 以便学习。

表 3.2 傅里叶变换的性质

名称	时域 $x(t)$		频域 $X(j\omega)$
线性	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$		$a_1 X_1(j\omega) + a_2 X_2(j\omega)$
奇偶性	$x(t)$ 为实函数		$ X(j\omega)  =  X(-j\omega) $ $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$ $\text{Re}(\omega) = \text{Re}(-\omega)$ $\text{Im}(\omega) = -\text{Im}(-\omega)$ $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$
		$x(t) = x(-t)$	$X(j\omega) = \text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega) = 0$
		$x(t) = -x(-t)$	$X(j\omega) = j\text{Im}(\omega), \text{Re}(\omega) = 0$
	$x(t)$ 为虚函数		$ X(j\omega)  =  X(-j\omega) $ $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$ $\text{Re}(\omega) = -\text{Re}(-\omega)$ $\text{Im}(\omega) = \text{Im}(-\omega)$ $X(-j\omega) = -X^*(j\omega)$
对称性	$X(jt)$		$2\pi x(-\omega)$
时频展缩特性	$x(at) \quad a \neq 0$		$\frac{1}{ a } X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
时移特性	$x(t + t_0)$		$X(j\omega) e^{j\omega t_0}$
频移特性	$x(t) e^{\pm j\omega_0 t}$		$X[j(\omega \mp \omega_0)]$
时域微分	$x^{(n)}(t)$		$(j\omega)^n X(j\omega)$
频域微分	$t^n x(t)$		$j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(j\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$		$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0) \delta(\omega)$
时域卷积	$x_1(t) * x_2(t)$		$X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$
频域卷积	$x_1(t) \cdot x_2(t)$		$\frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$
帕塞瓦尔等式	$E = \int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(j\omega) ^2 d\omega$		

### 3.3.4 周期信号的傅里叶变换

由前面的讨论我们已知任意周期信号都可展成傅里叶级数,相应的频谱为离散谱;而对于非周期信号存在傅里叶变换,相应的引入了频谱密度函数。现在的问题是对于周期信号是否可以引入频谱密度函数,如果可以,其频谱密度函数的表达式应如何?以及与它的傅里叶级数的关系又如何?

假定一般的周期信号  $x_T(t)$  的周期为  $T$ ,由 3.2 节可知

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi t/T}$$

其中  $X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_T(t) e^{jk2\pi t/T} dt$ 。

令  $x_T(t)$  的傅里叶变换为  $X_T(j\omega)$ ,则

$$X_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathcal{F}[e^{jk\omega_0 t}]$$

已知  $e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$ ,代入上式,则

$$x_T(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (3.65)$$

式(3.65)表明,任意周期信号的傅里叶变换也是一系列冲激函数的线性组合,这些冲激发生在各次谐波频率上,强度为相应谐波分量复振幅的  $2\pi$  倍。这与前面傅里叶展开的分析结果是一致的,仍是谐波离散频谱,只是那里以复振幅  $X_k$  描述各次谐波( $\omega_0 = 2\pi/T$ ) 振幅的实际大小,是有限值;这里用  $X_T(j\omega)$ ,即  $2\pi X_k \delta(\omega - k\omega_0)$  描述各次谐波的相对大小,是代表频谱密度。

根据以上分析可知,周期信号并不满足绝对可积的条件,只是在引入冲激函数之后,它的傅里叶变换才可以计算。

**【例 3.3.13】** 求如图 3.22 所示周期冲激串  $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$  ( $T$  为周期) 的频谱。

**解:** 先求  $\delta_T(t)$  指数形式的傅里叶级数展开式,不失一般性,设  $t_0 = -\frac{T}{2}$ ,由式(3.16)有

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T}$$

将上述结果代入式(3.65)有

$$\delta_T(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(t - k\omega_0)$$

即

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\omega_0)$$

记

$$\delta_{\omega_0}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

则有

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3.66)$$

可见周期冲激串的频谱仍为周期冲激串,强度为  $\omega_0$ ,周期也为  $\omega_0$ ,如图 3.22 所示。

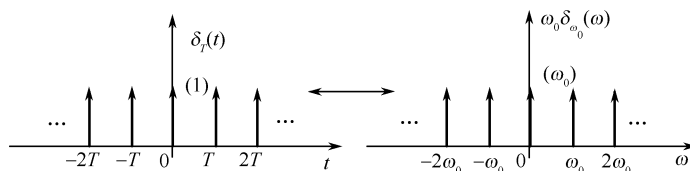
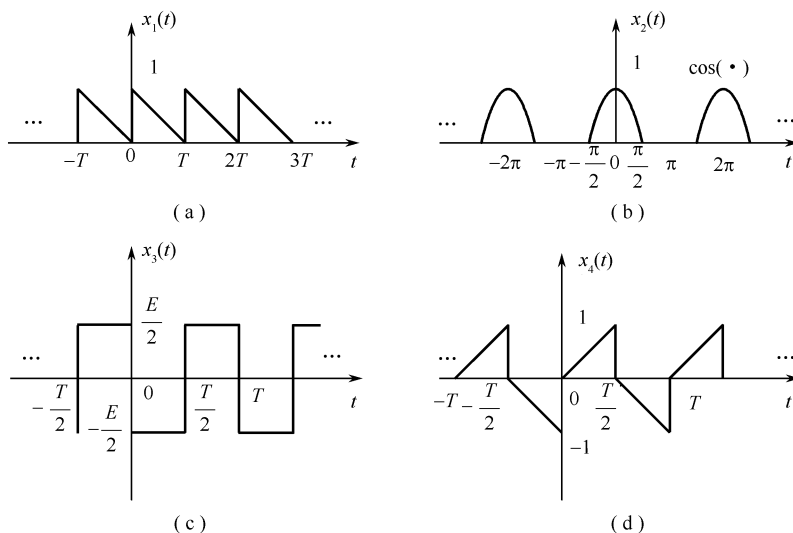


图 3.22 周期冲激串及其频谱

### 习 题 三

3.2-1 将题 3.2-1 图所示周期信号展开成三角函数形式和指数形式的傅里叶级数,并画出频谱图。



题 3.2-1 图

3.2-2 一个全波整流器(不包括滤波)的输入/输出关系可以描述为  $y(t) = |x(t)|$

(1) 若  $x(t) = \cos(t)$ , 试画出输入和输出信号的波形图,并求输入和输出信号的基本周期。

(2) 求输入和输出信号的直流分量的幅度。

(3) 若  $x(t) = \cos(t)$ , 求输出信号  $y(t)$  的傅里叶级数的系数。

3.2-3 已知周期信号  $x(t)$  一个周期  $(0 < t < T)$  前四分之一波形如题 3.2-3 图所示,就下列情况画出一个周期内的整个波形图。

(1)  $x(t)$  是偶信号,只含偶次谐波;

(2)  $x(t)$  是偶信号,只含奇次谐波;

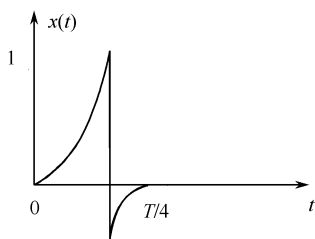
(3)  $x(t)$  是偶信号,含偶次奇次谐波;

- (4)  $x(t)$  是奇信号, 只含偶次谐波;  
 (5)  $x(t)$  是奇信号, 只含奇次谐波;  
 (6)  $x(t)$  是奇信号, 含偶次奇次谐波。

3.2-4 已知周期信号的傅里叶级数展开式为

$$x(t) = 3 + 3\cos 2t + 2\sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(6t - \frac{\pi}{4}\right)$$

- (1) 画出单边振幅谱及其对应的相位谱;  
 (2) 画出双边振幅谱及其对应的相位谱。



题 3.2-3 图

3.2-5 已知周期为  $T$  的周期信号  $x(t)$  的傅里叶级数展开式的系数为  $X_k$ , 即

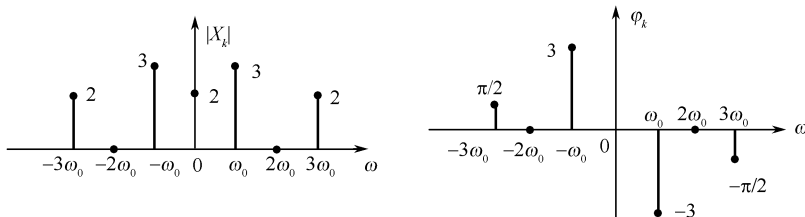
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

试求下列周期信号的傅里叶系数(用  $X_k$  表示)

- (1)  $x(t - t_0)$                       (2)  $x'(t)$                       (3)  $x(t)e^{j\omega_0 t}$   
 (4)  $x(-t)$                       (5)  $x^*(t)$                       (6)  $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$  (假定  $X_0 = 0$ )  
 (7)  $x(at)$  ( $a > 0$ , 确定其周期)

3.2-6 已知周期信号  $x(t)$  的双边谱如题 3.2-6 图所示, 求

- (1) 写出指数形式的傅里叶级数展开式;  
 (2) 画出与之对应的单边谱;  
 (3) 写出三角形形式的傅里叶级数。



题 3.2-6 图

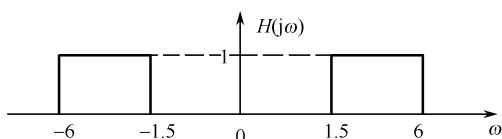
3.2-7 若周期矩形信号  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  波形如图 3.1 所示,  $x_1(t)$  的参数取值为  $\tau = 0.5\mu\text{s}$ ,  $T = 1\mu\text{s}$ ,  $E = 1\text{V}$ ;  $x_2(t)$  的参数取值为  $\tau = 1.5\mu\text{s}$ ,  $T = 3\mu\text{s}$ ,  $E = 3\text{V}$ ; 分别求:

- (1)  $x_1(t)$  的谱线间隔和带宽(第一个零点位置), 频率单位以 kHz 表示;  
 (2)  $x_2(t)$  的谱线间隔和带宽;  
 (3)  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$  的基波幅度之比;  
 (4)  $x_1(t)$  基波幅度与  $x_2(t)$  三次谐波幅度之比。

3.2-8 已知一系统的频率响应为  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ , 当以题 3.2-1(c) 图所示的周期信号作为输入激励时, 求输出响应。

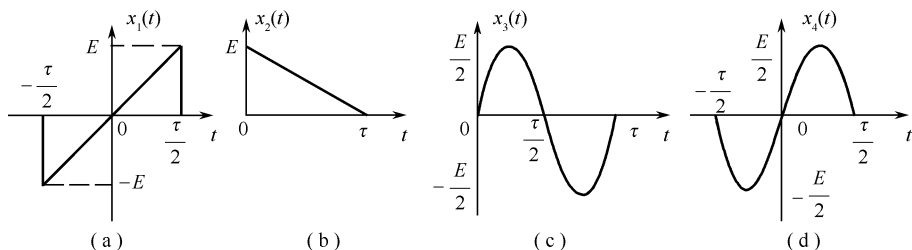
3.2-9 (1) 不用做任何积分运算求信号  $x(t) = \cos 5t \sin 3t$  的指数形式傅里叶级数;  
 (2) 画出该信号  $x(t)$  的频谱图;  
 (3) 将该信号  $x(t)$  加到频率响应如题 3.2-9 图所示的 LTI 系统的输入端, 求其响应  $y(t)$ 。





题 3.2-9 图

3.3-1 求如题 3.3-1 图所示信号的傅里叶变换。

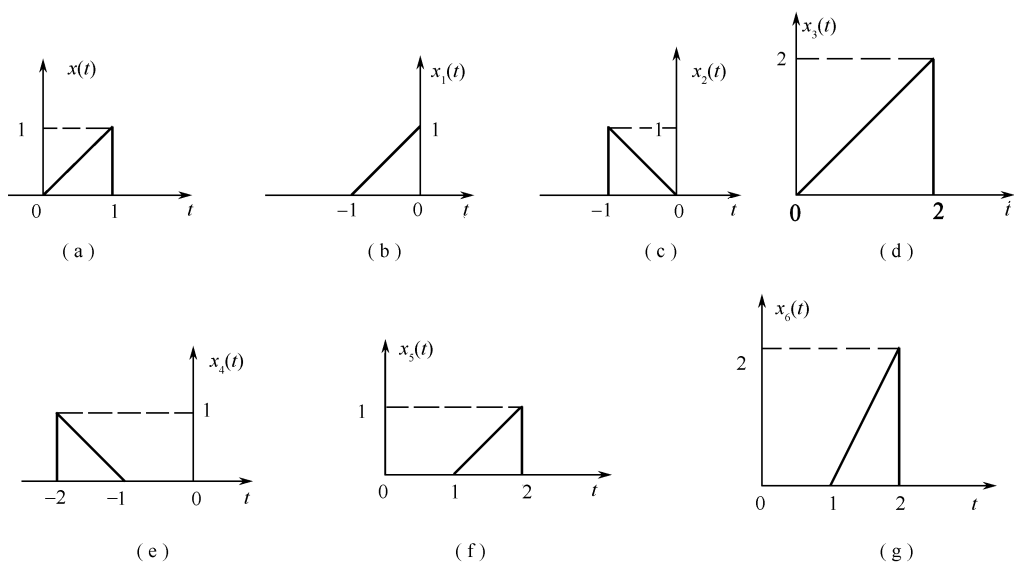


题 3.3-1 图

3.3-2 若已知  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ , 试求下列信号的频谱。

- (1)  $x^2(t) + x(2t)$       (2)  $[1 + mx(t)]\cos\omega_0 t$       (3)  $\int_{-\infty}^t \tau x(\tau) d\tau$   
 (4)  $x(3t - 6)$       (5)  $(t + 2)x(t)$       (6)  $x'(t) + x^*(t)$   
 (7)  $x(t) * x(t - 1)$       (8)  $(1 - t)x(1 - t)$

3.3-3 先求出如题 3.3-3 图所示信号  $x(t)$  的频谱  $X(j\omega)$  的具体表达式, 再利用傅里叶变换的性质由  $X(j\omega)$  求出其余信号的频谱。



题 3.3-3 图

3.3-4 用傅里叶变换的对称特性求下列信号的频谱。

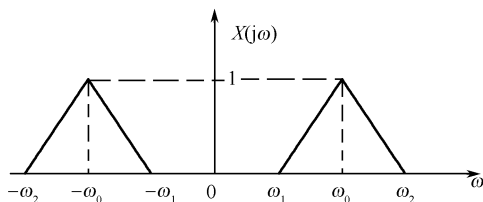
$$(1) \frac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)} \quad (2) \frac{2a}{a^2+t^2}, (a>0)$$

$$(3) \left(\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}\right)^2 \quad (4) \frac{1}{a+jt}$$

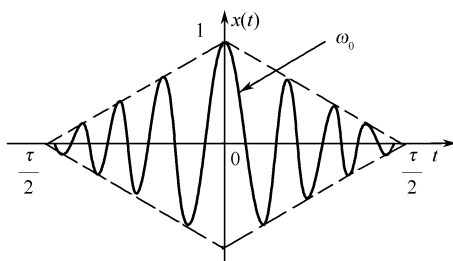
3.3-5 已知  $x(t)$  的频谱如题 3.3-5 图所示, 利用卷积定理粗略画出下列信号的频谱(注明频谱的边界频率)。

$$(1) x(t)\cos\omega_0 t \quad (2) x^2(t) \quad (3) x(t)e^{j\omega_0 t} \quad (4) x(t)\cos\omega_1 t$$

3.3-6 求题 3.3-6 图所示调幅信号的频谱。



题 3.3-5 图



题 3.3-6 图

3.3-7 已知频谱  $X(j\omega)$  如下, 求信号  $x(t)$ 。

$$(1) X(j\omega) = \frac{1}{3+j(\omega+2)} \quad (2) X(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)^2}$$

$$(3) X(j\omega) = \frac{j\omega+3}{-\omega^2+3j\omega+2} + 2\pi\delta(\omega) \quad (4) X(j\omega) = \frac{(j\omega)^2+5j\omega+4}{(j\omega)^2+6j\omega+5}$$

$$(5) X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + Sa(\omega\tau) \quad (6) X(j\omega) = \left(\frac{\sin\omega}{\omega}e^{-j\omega}\right)^2$$

3.3-8 已知系统单位冲激响应  $h(t)$  的频谱  $H(j\omega)$  及输入信号  $x(t)$  如下, 求系统的输出响应。

$$(1) H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$$

$$(a) x(t) = tu(t) \quad (b) x(t) = t[u(t) - u(t-1)]$$

$$(c) x(t) = e^{-3t}u(t) \quad (d) x(t) = \sin 3t + \sin t$$

$$(2) H(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6}, x(t) = e^{-t}u(t)$$

$$(3) H(j\omega) = \frac{-\omega^2+j4\omega+5}{-\omega^2+j3\omega+2}, x(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$(4) H(j\omega) = \frac{j\omega+3}{-\omega^2+j3\omega+2}, x(t) = u(t) - u(t-1)$$

3.3-9 已知描述 LTI 连续系统的方程如下, 输入信号  $x(t) = e^{-4t}u(t)$ , 求系统的输出响应  $y(t)$ 。

$$(1) y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

$$(2) y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3x'(t) + 5x(t)$$

3.3-10 已知一个 LTI 系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{j4\omega}{(j\omega)^2 + j6\omega + 8}$$

试求描述该系统的微分方程;并计算在输入  $x(t) = \cos(3t)u(t)$  时系统的稳态响应。

3.3-11 试求图 3.1 所示的周期矩形脉冲信号的傅里叶变换,并画出其频谱图。

3.3-12 已知频谱  $X(j\omega)$  如下,求信号  $x(t)$

$$(1) X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{2\omega_0}[\omega - n(\omega_c + 1)]$$

$$(2) X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(3n)\delta(\omega - 3n)$$

## 第 4 章 连续时间信号及系统的复频域分析

第 3 章研究了连续时间信号的频域分析。我们是以虚指数信号  $e^{j\omega t}$  ( $\omega$  为实角频率) 为基本信号, 将信号  $x(t)$  分解成具有不同频率的虚指数分量的叠加。这种分析方法在信号系统的分析和处理等领域占有重要地位。不过这种分析方法也有局限性, 例如, 虽然大多数实际信号都存在傅里叶变换, 但也有些重要信号(例如指数增长信号) 不存在傅里叶变换。另外, 傅里叶变换只能分析初始状态为零时系统的响应。

本章引入复频率  $s = \sigma + j\omega$  ( $\sigma, \omega$  均为实数), 以复指数信号  $e^{st}$  为基本信号, 将信号  $x(t)$  分解成具有不同复频率的复指数分量之叠加。而 LTI 系统的零状态响应是输入信号各个复指数分量引起的响应之叠加。另外, 若系统的初始状态不为零, 用这种方法也可以求解全响应。这种分析方法称为复频域分析或者  $s$  域分析。

### 4.1 拉普拉斯变换

#### 4.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

通过第 3 章的学习, 我们知道信号  $x(t)$  的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.1)$$

但有些常用函数, 例如, 单位阶跃信号  $u(t)$ 、符号函数  $\text{sgn}(t)$  等, 虽然存在傅里叶变换, 但不能用式(4.1)求; 而另外一些信号, 例如, 指数增长信号  $e^{at}u(t)$  ( $a > 0$ ), 不存在傅里叶变换。究其原因, 是因为当  $t \rightarrow \infty$  时信号的幅度不衰减, 甚至增长, 导致式(4.1)的积分不收敛。

为了解决以上问题, 我们将信号  $x(t)$  乘以衰减因子  $e^{-\sigma t}$  ( $\sigma$  为实数), 选择合适的  $\sigma$  值, 使得  $t \rightarrow \infty$  时信号  $x(t)e^{-\sigma t}$  的幅度衰减为 0, 即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

这样,  $x(t)e^{-\sigma t}$  满足绝对可积的条件, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < +\infty$$

从而使得  $x(t)e^{-\sigma t}$  的傅里叶变换存在

$$\mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

显然, 上式积分结果是关于  $(\sigma + j\omega)$  的函数, 记为  $X(\sigma + j\omega)$ 。这样, 得到一对傅里叶变换对:  $x(t)e^{-\sigma t} \leftrightarrow X(\sigma + j\omega)$ , 即有

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad (4.3)$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.4)$$

式(4.4)两端同乘以  $e^{\sigma t}$ , 得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (4.5)$$

令  $\sigma + j\omega = s$ , 即  $S$  的实部  $\text{Re}[s] = \sigma$ ,  $S$  的虚部  $\text{Im}(s) = \omega$ , 则  $d\omega = \frac{ds}{j}$ , 代入式(4.3)和式(4.5)得

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (4.6)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (4.7)$$

式(4.6)和式(4.7)称为**拉普拉斯变换对**, 简称拉氏变换对, 记为  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ 。

$X(s)$  称为  $x(t)$  的拉氏变换, 又称为**象函数**, 记为  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ 。

由此可见,  $x(t)$  的拉氏变换  $X(s)$  是  $x(t)e^{-\sigma t}$  的傅里叶变换。

#### 4.1.2 收敛域

如前所述, 选择合适的  $\sigma$  值才能使式(4.6)的积分收敛,  $X(s)$  才存在。我们首先看下面几个例子。

**【例 4.1.1】** 求信号  $x_1(t) = e^{at}u(t)$  (右边信号) 的拉氏变换。

$$\begin{aligned} \text{解: } X_1(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-a} [1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t}] = \frac{1}{s-a} [1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-a}, & \sigma = \text{Re}[s] > a \\ \text{不定}, \text{Re}[s] = a \\ \text{无界}, \text{Re}[s] < a \end{cases} \end{aligned}$$

可见, 只有当  $\sigma > a$  时,  $e^{at}u(t)$  的拉氏变换才存在。

根据例 4.1.1 题的分析结果, 我们得到一个常用的拉氏变换对, 即

$$e^{at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-a}, \text{Re}[s] > a \quad (4.8)$$

**【例 4.1.2】** 求信号  $x_2(t) = -e^{at}u(-t)$  (左边信号) 的拉氏变换。

$$\begin{aligned} \text{解: } X_2(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{at}u(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{s-a} [1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t}] = \frac{1}{s-a} [1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j\omega t}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-a}, & \sigma = \text{Re}[s] < a \\ \text{不定}, \text{Re}[s] = a \\ \text{无界}, \text{Re}[s] > a \end{cases} \end{aligned}$$

可见,只有当  $\sigma < \alpha$  时,  $-e^{\alpha t}u(-t)$  的拉氏变换才存在。

根据例 4.1.2 题的分析结果,我们得到一个常用的拉氏变换对,即

$$-e^{\alpha t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}, \operatorname{Re}[s] < \alpha \quad (4.9)$$

**【例 4.1.3】** 求信号  $x(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & t > 0 \\ e^{\beta t} & t < 0 \end{cases} = e^{\alpha t}u(t) + e^{\beta t}u(-t)$  (双边信号) 的拉氏变换。

**解:** 按照类似的分析方法,容易得到

$$\text{当 } \alpha < \beta \text{ 时, } X(s) = \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}, \alpha < \operatorname{Re}[s] < \beta$$

当  $\alpha \geq \beta$  时,  $X(s)$  不存在。

我们把使  $X(s)$  存在的  $s$  的范围(即  $s$  的实部  $\sigma$  的范围,因为  $e^{-j\omega t}$  不影响积分的收敛性)称为**收敛域**(Region of Convergence),简记为 ROC。表示收敛域的一个方便直观的方法是,以  $s$  的实部  $\sigma$  为横轴,虚部  $j\omega$  为纵轴建立平面,称为  **$s$  平面**,在  $s$  平面上把收敛域用阴影线表示出来。

分析以上三例,对于右边信号,拉氏变换定义式中的积分上限为  $+\infty$ ,所以,若对于某个  $\sigma_1$  该积分收敛,那么对于所有的  $\sigma > \sigma_1$ ,该积分一定也收敛,所以,右边信号的收敛域为右边收敛。同样,左边信号的收敛域为左边收敛,双边信号的收敛域为带状收敛。上面三个例子中拉氏变换的收敛域如图 4.1 所示,其中虚线称为收敛轴。

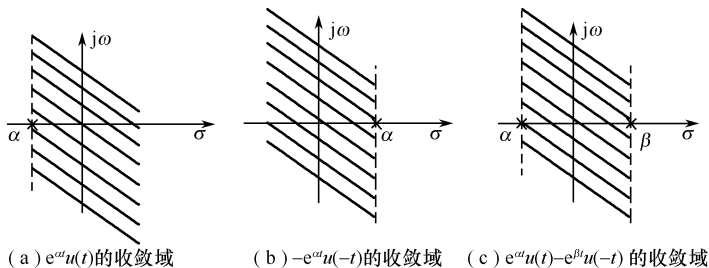


图 4.1 右边信号、左边信号、双边信号的收敛域

### 4.1.3 单边拉普拉斯变换

由以上讨论可知,式(4.6)定义的拉氏变换便于分析双边信号,但其收敛条件较为苛刻,这也限制了它的应用。另外,由例 4.1.1 和例 4.1.2 也可以看到,  $e^{\alpha t}u(t)$  和  $-e^{\alpha t}u(-t)$  的拉氏变换式完全相同,仅收敛域不同。换言之,  $X(s)$  必须与收敛域一起,才能与  $x(t)$  一一对应。这样增加了拉氏变换的复杂性,显然这种复杂性是试图既要处理因果信号,又要处理非因果信号而造成的。

通常遇到的信号都有初始时刻,不妨设其初始时刻为 0 时刻。这样在  $t < 0$  时  $x(t) = 0$ ,从而其拉氏变换可以写为

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (4.10)$$

式(4.10)中积分下限取  $0^-$ ,是考虑到  $x(t)$  可能在  $t = 0$  时刻包含冲激函数或其各阶导数。式(4.10)称为**单边拉氏变换**(简称为拉氏变换)。为了区分,(4.6)式称为**双边拉氏变换**,记

为  $X_B(s)$ 。

显然,对于因果信号  $x(t)$ ,由于  $x(t) = 0, t < 0$ ,所以其双边、单边拉氏变换相同。

与式(4.10)对应的反变换可以写为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad t > 0^- \quad (4.11)$$

下面,我们求几个常用信号的单边拉氏变换。

**【例 4.1.4】** 求矩形脉冲信号  $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \tau \\ 0 & \text{其余} \end{cases} = G_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$  的单边拉氏变换。

解: 
$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^\tau e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

显然,由于该信号是时限信号,函数值非零的时间段为有限长,拉氏变换定义式中的积分区间有限,故对所有的  $s, X(s)$  都存在。称为全  $s$  平面收敛。

**【例 4.1.5】** 求单位冲激信号  $\delta(t)$  的单边拉氏变换。

解: 
$$\delta(t) \leftrightarrow \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

也是全平面收敛。

**【例 4.1.6】** 求复指数信号  $x(t) = e^{s_0 t} u(t)$  ( $s_0$  为复常数) 的单边拉氏变换。

解: 
$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \frac{1}{s - s_0}, \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0]$$

即 
$$e^{s_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - s_0}, \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0] \quad (4.12)$$

若  $s_0$  为实数,令  $s_0 = a$  ( $a$  为实常数),得到

$$e^{at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - a}, \operatorname{Re}[s] > a \quad (4.13)$$

若  $s_0 = 0$ ,得到

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (4.14)$$

若  $s_0$  为虚数,令  $s_0 = \pm j\omega_0$ ,得到

$$e^{\pm j\omega_0 t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s \mp j\omega_0}, \operatorname{Re}[s] > 0$$

利用欧拉公式,根据上式可以得出

$$\cos(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (4.15)$$

$$\sin(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (4.16)$$

可见,大部分常用信号的单边拉氏变换都存在,但也有些信号不存在拉氏变换,例如  $t^t$ 、 $e^{t^2}$  等增长过快的信号,无法找到合适的  $\sigma$  值使其收敛,所以不存在拉氏变换,这类信号称为超指数信号。但实际中遇到的一般都是指数阶信号,总能找到合适的  $\sigma$  值使其收敛,故常见信号的

单边拉氏变换总是存在的。

对比双边拉氏变换的定义式(4.6)和单边拉氏变换的定义式(4.10),以及前面几个例子,可以看出,双边拉氏变换即可以分析因果信号,又可以分析非因果信号,但需要与收敛域一起才能与时域信号唯一对应。而单边拉氏变换只能分析因果信号,但优势在于不需要指明收敛域就可以与时域一一对应,这种唯一性大大简化了分析。并且在实际应用中,遇到的连续时间信号大都是因果信号。所以本书主要讨论单边拉氏变换,如果不特别指明,拉氏变换都是指单边拉氏变换。

#### 4.1.4 拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系

在本章的开始,我们用求  $x(t)e^{-\sigma t}$  的傅氏变换的方法,引入复变量  $s = \sigma + j\omega$ ,得出了拉氏变换。随后又将时域信号  $x(t)$  限制为因果信号,从而得到单边拉氏变换。两种变换的定义式分别为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

显然, $x(t)$  的拉氏变换  $X(s)$  是  $x(t)e^{-\sigma t}$  的傅里叶变换,而傅里叶变换即是  $\sigma = 0$  时(即  $s$  平面虚轴上)的拉氏变换。我们通过以下几个例子来深入理解。

**【例 4.1.7】** 求指数衰减信号  $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$ ,  $\alpha < 0$  的傅氏变换和拉氏变换。

**解:**根据前面学习过的变换对,直接可以得到

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \alpha}$$

$$X(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \text{Re}[s] > \alpha$$

因为  $\alpha < 0$ ,收敛域包含虚轴,傅氏变换和拉氏变换都存在,并且

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$$

**【例 4.1.8】** 求阶跃信号  $x(t) = u(t)$  的傅氏变换和拉氏变换。

**解:**根据前面学习过的变换对,直接可以得到

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$X(s) = \frac{1}{s}, \text{Re}[s] > 0$$

此时收敛域以虚轴为边界,傅氏变换和拉氏变换都存在,但

$$X(j\omega) \neq X(s) \Big|_{s=j\omega}$$



**【例 4.1.9】** 求指数增长信号  $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$ ,  $\alpha > 0$  的傅氏变换和拉氏变换。

**解:** 由于指数增长信号不满足绝对可积, 傅氏变换不存在。而拉氏变换存在

$$X(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \operatorname{Re}[s] > 0$$

因为  $\alpha > 0$ , 收敛域不包含虚轴。

综合以上分析, 我们可以得出以下结论:

(1) 当拉氏变换的收敛域包含虚轴时, 拉氏变换和傅氏变换都存在, 并且  $X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega}$ ;

(2) 当拉氏变换的收敛域以虚轴为边界时, 拉氏变换和傅氏变换都存在, 但傅氏变换中含有冲激函数, 故  $X(j\omega) \neq X(s) \Big|_{s=j\omega}$ ;

(3) 当拉氏变换的收敛域不包含虚轴并且不以虚轴为边界时, 拉氏变换存在, 但傅氏变换不存在。

#### 4.1.5 单边拉普拉斯变换的性质

拉氏变换的性质, 反映了时域和复频域的关系。掌握这些性质对于掌握复频域分析方法十分重要。学习它们时, 要注意与傅里叶变换的性质进行对比, 比较相同点和不同点。

##### 4.1.5.1 时移(延时) 特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ,  $\operatorname{Re}[s] > \sigma_c$ , 则

$$x(t - t_0) u(t - t_0) \leftrightarrow X(s) e^{-st_0}, \operatorname{Re}[s] > \sigma_c \quad (4.17)$$

式中  $t_0 > 0$ 。

**证明:**

$$\begin{aligned} x(t - t_0) u(t - t_0) &\leftrightarrow \int_{0-}^{\infty} x(t - t_0) u(t - t_0) e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0-}^{\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt \end{aligned}$$

令  $t - t_0 = u$ , 则  $t = u + t_0$ ,  $dt = du$

于是有

$$\begin{aligned} x(t - t_0) u(t - t_0) &\leftrightarrow \int_{0-}^{\infty} x(u) e^{-s(u+t_0)} du \\ &= e^{-st_0} \int_{0-}^{\infty} x(u) e^{-su} du \\ &= e^{-st_0} X(s) \end{aligned}$$

需要指出的是, 式(4.17)中的  $x(t - t_0) u(t - t_0)$  并非  $x(t - t_0) u(t)$ , 显然, 当  $x(t)$  为因果信号时, 只要  $t_0 > 0$ , 则  $x(t - t_0) u(t - t_0) = x(t - t_0) u(t) = x(t - t_0)$ , 但当  $x(t)$  为非因果信号时, 三者不一定相等。

**【例 4.1.10】** 求矩形脉冲信号  $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \tau \\ 0 & \text{其余} \end{cases} = G_{\tau} \left( t - \frac{\tau}{2} \right)$  的拉氏变换。

在例 4.1.4 题中,我们用拉氏变换的公式求出了矩形脉冲信号的拉氏变换,现在我们用另外的方法来求。

解:由于

$$x(t) = G_{\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = u(t) - u(t - \tau)$$

利用式(4.14)的变换对  $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ ,

再根据时移特性,得

$$u(t - \tau) \leftrightarrow \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

所以,

$$G_{\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = u(t) - u(t - \tau) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

#### 4.1.5.2 复频移特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ,  $\text{Re}[s] > \sigma_c$ , 则

$$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s - s_0), \text{Re}[s] > \sigma_c + \sigma_0 \quad (4.18)$$

式中  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  为复常数。

【例 4.1.11】求  $e^{at} \sin(\omega_0 t) u(t)$  的拉氏变换。

解:利用式(4.16)的变换对

$$\sin(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \text{Re}[s] > 0$$

所以

$$e^{at} \sin(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}, \text{Re}[s] > a \quad (4.19)$$

同理可得

$$e^{at} \cos(\omega_0 t) u(t) \leftrightarrow \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega_0^2}, \text{Re}[s] > a \quad (4.20)$$

#### 4.1.5.3 展缩特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ,  $\text{Re}[s] > \sigma_c$ , 则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \text{Re}[s] > a\sigma_c \quad (4.21)$$

式中,  $a > 0$  为实常数。

如果时域既时移又变换时间尺度,可以得到

$$x(at + b) u(at + b) \leftrightarrow \frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}s} X\left(\frac{s}{a}\right), \text{Re}[s] > a\sigma_c \quad (4.22)$$

#### 4.1.5.4 时域微分特性

若  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ,  $\text{Re}[s] > \sigma_c$ , 则

$$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-), \text{Re}[s] > \sigma_c \quad (4.23)$$

证明:

$$\begin{aligned} x'(t) &\leftrightarrow \int_{0^-}^{+\infty} x'(t) e^{-st} dt \\ &= x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) e^{-st} - x(0^-) + sX(s) \end{aligned}$$

因为  $X(s)$  存在,  $x(t)$  必为指数阶信号, 且在收敛域内有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) e^{-st} = 0$ 。

所以

$$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

式中的  $x(0^-)$  是函数  $x(t)$  在  $t = 0^-$  时刻的取值。

反复应用式(4.23)可以得到  $x(t)$  高阶导数的拉氏变换。例如,

$$\begin{aligned} x''(t) &\leftrightarrow s[sX(s) - x(0^-)] - x'(0^-) \\ &= s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (4.25)$$

上式中,  $x^{(n)}(0^-)$  是指  $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t)$  在  $t = 0^-$  时刻的取值。

显然, 当  $x(t)$  为因果信号时, 微分特性有更简洁的形式

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) \quad (4.26)$$

我们已经知道, 描述连续时间 LTI 系统的是常系数线性微分方程, 显然我们可以利用拉氏变换的微分性质将微分方程转换到  $s$  域。在 4.3 节中将会看到, 时域微分特性在连续时间系统的复频域分析中很重要。

#### 4.1.5.5 卷积定理

若  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  为因果信号, 且

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$$

则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) \cdot X_2(s) \quad (4.27)$$

收敛域至少为两者的公共部分。

请自行证明。

**【例 4.1.12】** 已知某 LTI 系统的单位冲激响应  $h(t) = e^{-2t} u(t)$ , 求输入  $x(t) = u(t)$  时的零状态响应  $y_{zs}(t)$ 。

**解:** 由于系统的零状态响应

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

根据卷积定理有

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s)$$

由于

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$$

$$h(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+2}$$

所以

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}$$

所以

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

上面我们学习了拉氏变换几个主要的性质,更多的单边拉氏变换性质见表 4.1。

表 4.1 拉氏变换的性质

性质名称	
线性	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
时移特性	$x(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$
时域展缩特性	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \operatorname{Re}[s] > a\sigma_c$
复频移特性	$x(t)e^{s_0t} \leftrightarrow X(s-s_0), \operatorname{Re}[s] > \sigma_c + \sigma_0$
时域微分特性	$x'(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-)$ $x''(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$ $x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$
时域积分特性	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}x^{(-1)}(0^-), x^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$
复频域微分	$-tx(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$
复频域积分	$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} X(s)ds$
卷积特性	$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s) \cdot X_2(s)$ $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}X_1(s) * X_2(s)$
初值定理	若 $x(t)$ 在 $t=0$ 处不包含冲激信号及其各阶导数, 则 $x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
终值定理	若 $sX(s)$ 的收敛域包含虚轴, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

利用拉氏变换的性质,可以推导出更多的拉氏变换对,如表 4.2 所示。

表 4.2 常用的单边拉氏变换对

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1, 全部 $s$
$\delta(t-t_0), t_0 > 0$	$e^{-st_0}$ , 全部 $s$
$\delta^{(n)}(t)$	$s^n$ , 全部 $s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re}[s] > 0$
$u(t-t_0), t_0 > 0$	$\frac{1}{s}e^{-st_0}, \operatorname{Re}[s] > 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}[s] > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}[s] > -a$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}, \operatorname{Re}[s] > -a$
$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}, \operatorname{Re}[s] > -a$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > -a$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}[s] > -a$

## 4.2 单边拉普拉斯反变换

对于单边拉氏反变换,由式(4.11)可知,象函数  $X(s)$  的拉氏反变换为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, t > 0^- \quad (4.28)$$

上述积分应该用复变函数积分中的留数定理<sup>①</sup>求得,我们在这里不详细介绍这种方法。下面介绍更为简便的求拉氏反变换的方法。

### 4.2.1 利用拉普拉斯变换性质求解

如果象函数  $X(s)$  是一些比较简单的函数,可利用常用的拉氏变换对,并借助拉氏变换的若干性质,求出  $x(t)$ 。

<sup>①</sup> 吴京等,《信号与系统分析》,P234,长沙:国防科技大学出版社,2004,8

【例 4.2.1】 已知  $X(s) = 2 + \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4}$ , 求其拉氏反变换  $x(t)$ 。

解: 由于

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\cos(2t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 2^2}$$

根据复频移特性, 得

$$e^{-2t} \cos(2t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+2}{(s+2)^2 + 2^2}$$

所以

$$x(t) = 2\delta(t) + e^{-2t} \cos(2t)u(t)$$

【例 4.2.2】 求  $X(s) = \frac{1}{s^3}(1 - e^{-st_0})$  的拉氏反变换,  $t_0 > 0$

解: 
$$X(s) = \frac{1}{s^3}(1 - e^{-st_0}) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^3}e^{-st_0}$$

由于

$$\frac{1}{2}t^2 u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^3}$$

利用复频移特性, 得

$$\frac{1}{2}(t - t_0)^2 u(t - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{s^3}e^{-st_0}$$

所以

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 u(t) - \frac{1}{2}(t - t_0)^2 u(t - t_0)$$

## 4.2.2 部分分式展开法

如果象函数  $X(s)$  是  $s$  的有理分式, 不妨设为

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (4.29)$$

设  $m < n$ , 即  $X(s)$  为有理真分式。其分母多项式  $A(s)$  称为  $X(s)$  的特征多项式, 方程  $A(s) = 0$  称为特征方程, 它的根  $p_i (i = 1, 2, \cdots, N)$  称为特征根(或极点), 也称为  $X(s)$  的固有频率(或自然频率)。

对  $X(s)$  进行部分分式展开, 展成若干项  $\frac{1}{s - p_i}$  或  $\frac{1}{(s - p_i)^m}$  的线性组合, 再利用常用的拉氏变换对, 求出  $x(t)$ 。关于部分分式展开后各项系数的求解方法, 可以采用 Heaviside(海维赛德)展开定理(见附录 1), 这里不详细介绍, 只给出几个典型的例子。

【例 4.2.3】 求  $X(s) = \frac{3s^3 + 8s^2 + 7s + 1}{s^2 + 3s + 2}$  的拉氏反变换。

解: 因为  $X(s)$  不是真分式, 应先将其化为真分式, 即

$$X(s) = 3s - 1 + \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = 3s - 1 + X_1(s)$$

$$X_1(s) = \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4s + 3}{(s + 2)(s + 1)} = \frac{K_1}{s + 2} + \frac{K_2}{s + 1}$$

$$K_1 = (s+2)X_1(s) \Big|_{s=-2} = 5$$

$$K_2 = (s+1)X_1(s) \Big|_{s=-1} = -1$$

所以

$$X(s) = 3s - 1 + \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

所以

$$x(t) = 3\delta'(t) - \delta(t) + 5e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t)$$

【例 4.2.4】 求  $X(s) = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+3)^3}$  的拉氏反变换。

解:

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B_1}{(s+3)^3} + \frac{B_2}{(s+3)^2} + \frac{B_3}{s+3}$$

其中,

$$A = (s+1)X(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

$$B_1 = (s+3)^3 X(s) \Big|_{s=-3} = -6$$

$$B_2 = \frac{d}{ds}[(s+3)^3 X(s)] \Big|_{s=-3} = \frac{3}{2}$$

$$B_3 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2}[(s+3)^3 X(s)] \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

所以

$$X(s) = \frac{1/4}{s+1} + \frac{-6}{(s+3)^3} + \frac{3/2}{(s+3)^2} + \frac{-1/4}{s+3}$$

所以

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \left(-3t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^{-3t}u(t)$$

【例 4.2.5】 求  $X(s) = \frac{3s+5}{s^2+2s+2}$  的拉氏反变换。

$$\text{解: } X(s) = \frac{3s+5}{s^2+2s+2} = \frac{3(s+1)+2}{(s+1)^2+1} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1}$$

利用式(4.19)和式(4.20)得到

$$x(t) = (3\cos t + 2\sin t)e^{-t}u(t)$$

### 4.3 利用拉普拉斯变换求解 LTI 系统的响应

拉氏变换是分析连续时间 LTI 系统的有力数学工具。本节讨论运用拉氏变换,求解系统响应的一些问题。

### 4.3.1 微分方程的复频域求解

如前所述,描述连续时间 LTI 系统的是常系数线性微分方程,其一般形式如下:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

式中,各系数均为实数,设系统的初始状态为  $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$ 。

求解系统响应的计算过程就是求解此微分方程。第2章中讨论了微分方程的时域求解方法,求解过程较为烦琐。下面我们学习用拉氏变换的方法求解微分方程。

令  $x(t) \leftrightarrow X(s), y(t) \leftrightarrow Y(s)$ , 根据拉氏变换的时域微分特性

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-) \quad (4.31)$$

$$y^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} y'(0^-) - \cdots - y^{(n-1)}(0^-) \quad (4.32)$$

若输入信号  $x(t)$  为因果信号,则  $t = 0^-$  时刻  $x(t)$  及其各阶导数为零,所以

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n X(s) \quad (4.33)$$

这样,将式(4.30)等号两边取拉氏变换,就可以将描述  $y(t)$  和  $x(t)$  之间关系的微分方程变换为描述  $Y(s)$  和  $X(s)$  之间关系的代数方程,并且初始状态已自然地包含在其中,可直接得出系统的全响应解,求解步骤简明且有规律。现举例说明。

**【例 4.3.1】** 某 LTI 系统  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$ , 输入信号  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ , 初始状态  $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1$ , 求全响应。

**解:** 对原微分方程两边取拉氏变换,可得

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = 2sX(s) + X(s) \quad (4.34)$$

现将  $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1, X(s) = \frac{1}{s+3}$  代入上式,得

$$\begin{aligned} (s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 4 &= \frac{2s+1}{s+3} \\ Y(s) &= \frac{s^2 + 9s + 13}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{5/2}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{5/2}{s+3} \end{aligned}$$

求反变换得

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - \frac{5}{2}e^{-3t}u(t)$$

在第2章中,我们曾讨论了全响应中的零输入响应与零状态响应、固有响应与强迫响应的概念,这里从  $s$  域的角度来研究这一问题。

在例 4.3.1 题中,由式(4.34)可以得到

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}X(s) + \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 3y(0^-)}{s^2+3s+2}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2s+1}{s^2+3s+2} \frac{1}{s+3} + \frac{s+4}{s^2+3s+2} \\
&= \underbrace{\frac{-1/2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{-5/2}{s+3}}_{\text{零状态响应 } Y_{zs}(s)} + \underbrace{\frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+2}}_{\text{零输入响应 } Y_{zi}(s)} + \underbrace{\frac{5/2}{s+1} + \frac{1}{s+2}}_{\text{固有响应 } Y_n(s)} + \underbrace{\frac{-5/2}{s+3}}_{\text{强迫响应 } Y_f(s)}
\end{aligned}$$

相应地,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) - \frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{零状态响应 } y_{zs}(t)} + \underbrace{3e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)}_{\text{零输入响应 } y_{zi}(t)} \\
&= \underbrace{\frac{5}{2}e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)}_{\text{固有响应 } y_n(t)} + \underbrace{-\frac{5}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{强迫响应 } y_f(t)}
\end{aligned}$$

可见,  $Y(s)$  的极点由两部分组成, 一部分是系统特征根形成的极点  $-1$ 、 $-2$  (称为**自然频率**或**固有频率**), 构成系统**固有响应**  $y_n(t)$ , 另一部分是激励信号的象函数  $X(s)$  的极点  $-3$ , 构成**强迫响应**  $y_f(t)$ 。所以说, 固有响应  $y_n(t)$  的函数形式由系统的特征根决定, 强迫响应  $y_f(t)$  的函数形式由激励信号决定。

#### 4.3.2 电路系统的复频域求解

首先复习电路中相关的基本知识。

基尔霍夫电流定律(KCL)指出: 对任意节点, 在任一时刻流入(或流出)该节点电流的代数和恒等于零, 即

$$\sum i(t) = 0 \quad (4.35)$$

基尔霍夫电压定律(KVL)指出: 对任意回路, 电压降(或电压升)之和恒等于零, 即

$$\sum u(t) = 0 \quad (4.36)$$

观察式(4.35)和式(4.36), 很容易得到基尔霍夫电流定律和电压定律在  $s$  域的表示形式

$$\sum I(s) = 0 \quad (4.37)$$

$$\sum U(s) = 0 \quad (4.38)$$

对于电阻、电容、电感, 假设其端电压  $u(t)$  与电流  $i(t)$  为关联参考方向, 那么

##### 1. 电阻 $R$

$$u_R(t) = Ri_R(t) \quad (4.39)$$

上式两边取拉氏变换得到

$$U_R(s) = RI_R(s) \quad (4.40)$$

显然, 电阻的  $s$  域模型与时域模型相同。

##### 2. 电感 $L$

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \quad (4.41)$$

利用拉氏变换的时域微分特性,上式两边取拉氏变换得到

$$U_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0^-) \quad (4.42)$$

式中,  $i_L(0^-)$  为电感中的初始电流。

这样,电感端电压的象函数  $U_L(s)$  (简称为象电压) 可以看成两部分电压相串联,第一部分为  $s$  域感抗  $sL$  乘以电流的象函数(简称为象电流)  $I_L(s)$ ,第二部分为内部电压源  $-Li_L(0^-)$ 。这样,电感  $L$  的  $s$  域模型如图 4.2(b) 所示。

由式(4.2)可以得到

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{Ls} + \frac{i_L(0^-)}{s} \quad (4.43)$$

流过电感的象电流  $I_L(s)$  可以看作两部分并联,如 4.2(c) 所示。

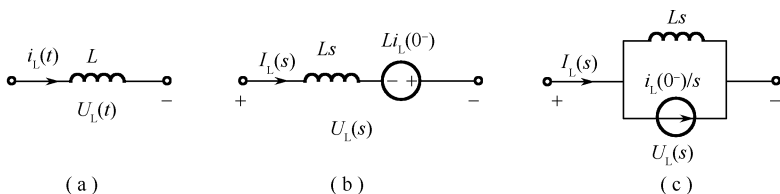


图 4.2 电感及其  $s$  域模型

### 3. 电容 $C$

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \quad (4.44)$$

利用拉氏变换的时域微分特性,上式两边取拉氏变换得到

$$I_C(s) = CsU_C(s) - C U_C(0^-) \quad (4.45)$$

即

$$U_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{1}{s} u_C(0^-) \quad (4.46)$$

式中,  $u_C(0^-)$  为电容两端的初始电压。这样,可以建立电容  $s$  域模型,如图 4.3 所示。

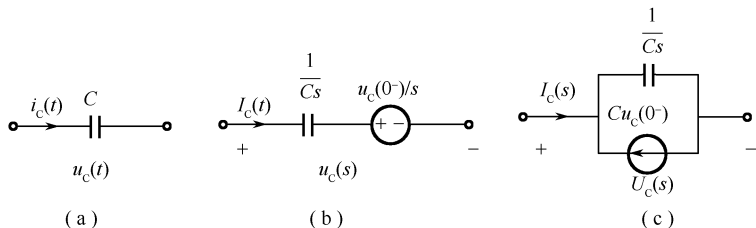
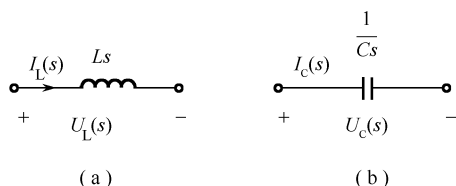


图 4.3 电容及其  $s$  域模型

通过以上讨论可见,拉氏变换可以将时域中元件端电压  $u(t)$  与电流  $i(t)$  之间的微积分关系转变为象电压  $U(s)$  与象电流  $I(s)$  之间的代数关系,并且包含了初始状态  $u_C(0^-)$  和  $i_L(0^-)$ 。显然,当电感的初始电流  $i_L(0^-)$  或电容的初始电压  $u_C(0^-)$  为零时,其  $s$  域模型更为简单,如图 4.4 所示。

在分析电路时,我们可以将电路中的元件用其  $s$  域模型来代替,然后利用基尔霍夫定律的  $s$  域形式——式(4.37)和式(4.38),直接列出  $s$  域的电路方程,求出响应的象函数,再进行反变换就得到全响应的时域形式。

图 4.4 零状态条件下电感、电容的  $s$  域模型

【例 4.3.2】 图 4.5 所示 RLC 电路,  $C = 1\text{F}$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $R = \frac{5}{2}\Omega$ , 输入激励电压源  $x(t) = u(t)$ , 初始状态为  $i_L(0^-) = 1\text{A}$ ,  $u_C(0^-) = 2\text{V}$ , 求全响应电流  $i(t)$ 。

解:  $s$  域等效电路图如图 4.6 所示。

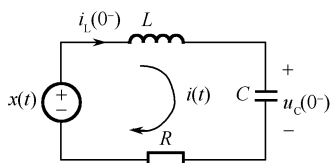
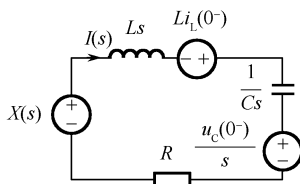


图 4.5 例 4.3.2 电路图

图 4.6  $s$  域等效电路图

根据 KVL 定律, 得

$$LsI(s) - Li_L(0^-) + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{u_C(0^-)}{s} + RI(s) = X(s)$$

将  $C = 1\text{F}$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $R = \frac{5}{2}\Omega$ ,  $i_L(0^-) = 1\text{A}$ ,  $u_C(0^-) = 2\text{V}$ ,  $X(s) = \frac{1}{s}$  代入上式, 并整理得:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{X(s) + Li_L(0^-) - \frac{u_C(0^-)}{s}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{s\left[1 - \frac{1}{s}\right]}{s^2 + \frac{5}{2}s + 1} = \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

所以全响应电流

$$i(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

## 4.4 系统函数分析

### 4.4.1 系统函数

如前所述, 描述连续时间 LTI 系统的是常系数线性微分方程, 其一般形式如下:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (4.47)$$

设系统的初始状态为零,输入  $x(t)$  的象函数为  $X(s)$ ,零状态响应  $y_{zs}(t)$  的象函数为  $Y_{zs}(s)$ ,上式取拉氏变换,得到

$$Y_{zs}(s) \sum_{k=0}^n a_k s^k = X(s) \sum_{r=0}^m b_r s^r$$

令  $A(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, B(s) = \sum_{r=0}^m b_r s^r$ , 得到

$$Y_{zs}(s) = X(s) \frac{B(s)}{A(s)}$$

令

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (4.48)$$

$H(s)$  称为系统函数。可见,根据描述系统的微分方程容易写出系统函数  $H(s)$ ,反之亦然。  
系统函数只取决于系统本身,而与激励无关,与系统内部的初始状态也无关。

因此,零状态响应的象函数

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s) \quad (4.49)$$

式(4.48)和式(4.49)中的  $H(s)$  是否就是单位冲激响应  $h(t)$  的拉氏变换呢?我们下面进行分析。

当输入为单位冲激信号时,即  $x(t) = \delta(t)$  时,  $X(s) = 1$ ,此时的零状态响应即为  $h(t)$ ,根据式(4.49),其象函数为

$$\mathcal{L}[h(t)] = X(s)H(s) = H(s)$$

上式说明,单位冲激响应  $h(t)$  与系统函数  $H(s)$  是一对拉氏变换对。

对式(4.49)取拉氏反变换,并利用卷积定理,得到

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)H(s)] = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] * \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = x(t) * h(t)$$

这与时域分析中得到的结论是完全一致的。可见,拉氏变换把时域中的卷积运算转变为  $s$  域中的乘积运算。

式(4.48)因式分解后得到

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = K \frac{\prod_{r=1}^m (s - z_r)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad (4.50)$$

其中,  $K$  为常数,分母多项式  $A(s) = 0$  的根为  $p_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ ,称为极点(特征根),分子多项式  $B(s) = 0$  的根为  $z_r (r = 1, 2, \cdots, m)$ ,称为零点。极点和零点可能为实数或复数。只要  $H(s)$  表示一个实系统,则  $A(s)$ 、 $B(s)$  的系数都为实数,那么其复数零点或极点必成对出现。显然,如果不考虑常数  $K$ ,由系统的零点和极点可以得到系统函数  $H(s)$ 。

在  $s$  平面上标出  $H(s)$  的极、零点位置,极点用  $\times$  表示,零点用  $\circ$  表示,若为  $n$  重零点或极点,可在旁注以“( $n$ )”,就得到系统函数的极零点图。极零点图可以表示一个系统,常用来分析系统特性。

【例 4.4.1】 已知系统函数  $H(s) = \frac{(s-2)^2}{\left(s + \frac{3}{2}\right)^2 \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}$ , 求极点和零点, 并画出极零点图。

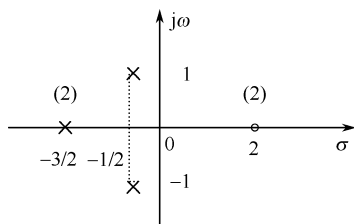


图 4.7 极零点图

解:  $H(s)$  有一个二阶零点:  $z_1 = 2$ ;

有一个二阶极点:  $p_1 = -\frac{3}{2}$ ;

另有两个共轭极点:  $p_2 = -\frac{1}{2} + j, p_3 = -\frac{1}{2} - j$ 。

零点图如图 4.7 所示。

下面, 我们来分析极点在  $S$  平面上的位置与单位冲激响应之间的关系。

表 4.2 中几个常用信号的拉氏变换及其极点如表 4.3 所示。

我们已经知道, 系统函数  $H(s)$  一般是关于  $s$  的有理多项式, 通过因式分解和部分分式展开, 如果只含有一阶极点, 可以将其分解成表 4.3 中各式的线性组合。也就是说, 根据系统函数  $H(s)$  的极点, 可以得出时域  $h(t)$  的函数形式。

下面以一阶极点为例进行分析, 不难得出如图 4.8 所示的对应关系。这样, 我们根据  $H(s)$  极点在  $s$  平面上的位置就可以得出单位冲激响应  $h(t)$  的函数形式。

表 4.3 常用拉氏变换对其极点

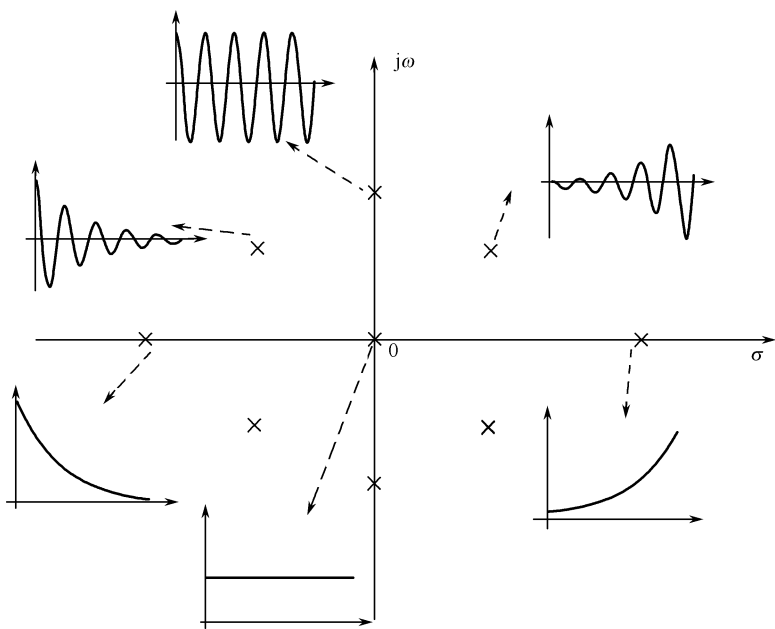
$x(t)$	$X(s)$	极 点
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$p_1 = 0$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$p_1 = a$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = \pm j\omega_0$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = \pm j\omega_0$
$e^{at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = a \pm j\omega_0$
$e^{at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$p_{1,2} = a \pm j\omega_0$

综合以上分析可以得出以下结论:

对于因果系统,  $H(s)$  在左半开平面的极点所对应的特征模式衰减(或振荡衰减), 当  $t \rightarrow \infty$  时, 这部分响应趋于零; 在虚轴上的一阶极点对应的特征模式不随时间变化(或等幅振荡); 在右半开平面的极点对应的特征模式增长(或振荡增长)。

在第 2 章的分析中我们得知: 系统自由响应的特征模式由系统函数的极点决定。所以, 系统自由响应的时域函数形式也可以用以上结论来分析。

注意, 这里的  $H(s)$  是单边拉氏变换, 相应的单位冲激响应  $h(t)$  为因果序列, 即我们仅针对因果系统给出的分析。

图 4.8  $H(s)$  的极点分布与对应的波形关系

#### 4.4.2 系统因果性和稳定性分析

##### 1. 系统因果性分析

第1章中已经学习过因果系统的概念,因果系统是指,响应不出现在激励之前的系统。显然,因果系统的单位冲激响应  $h(t)$  满足

$$h(t) = 0, t < 0 \quad (4.51)$$

对于因果系统,可以用单边拉氏变换来分析。此时,其收敛域为  $\text{Re}[s] > \sigma_0$ ,  $\sigma_0$  是最右边极点的模值。

##### 2. 系统稳定性分析

系统稳定性是系统一个极为重要的特性,也是大多数实际系统能够正常工作的基本条件。第2章中已经证明,系统稳定的充分必要条件是单位冲激响应  $h(t)$  绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M, M \text{ 为有限正常数} \quad (4.52)$$

前面学习傅里叶变换时已经指出:信号绝对可积,它的傅里叶变换就存在。也就是说,如果系统稳定,冲激响应  $h(t)$  绝对可积,那么  $h(t)$  的傅里叶变换存在。而傅里叶变换是虚轴上的拉氏变换,所以**稳定系统系统函数  $H(s)$  的收敛域必定包含虚轴。**

4.4.2 节中已经发现,对于因果系统,若  $H(s)$  的所有极点都位于左半开平面,则其单位冲激响应  $h(t)$  的幅度(或包络)是衰减的,式(4.52)的条件满足,从而系统为稳定系统。因此,**因果系统稳定的条件是,所有极点都位于左半开平面。**

**【例 4.4.2】** 某因果 LTI 系统  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x'(t) + x(t)$ , 求系统函数,画出

收敛域并判断系统稳定性。

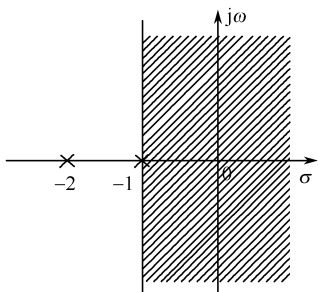


图 4.9 例 4.4.2 图

**解:**根据微分方程可直接写出系统函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

两个一阶极点  $p_1 = -1, p_2 = -2$ 。

因为系统为因果系统,所以收敛域为  $\text{Re}[s] > -1$ ,如图 4.9 所示。

因为收敛域包含虚轴,故系统为稳定系统。

**【例 4.4.3】** 如图 4.10 所示系统,其中子系统  $G(s)$  的系统函数为  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ,当常数  $K$  满足什么条件时,

系统是稳定的?

**解:**设加法器输出端为  $Y_1(s)$ ,可得

$$Y_1(s) = X(s) + KY(s)$$

所以

$$Y(s) = Y_1(s)G(s) = [X(s) + KY(s)]G(s)$$

整理得

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 - KG(s)}X(s)$$

所以,系统函数为

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 - KG(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2 - K}$$

可以解出极点为

$$p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 + K}$$

为使极点均位于左半开平面,必须满足

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 + K < \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

所以  $K < 2$  时系统稳定。

实际上,对于三阶以上的系统要想求出极点并非易事,劳斯和霍尔维茨提供了一种简便的方法,可以根据系统函数分母多项式的系数,直接判断连续时间因果系统的稳定性,而不必求极点,这就是“劳斯—霍尔维茨稳定性判据”<sup>①</sup>,我们这里不做详细介绍。

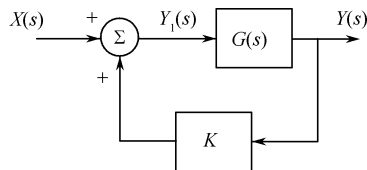


图 4.10 例 4.4.3 图

## 4.5 系统的图形表示方法

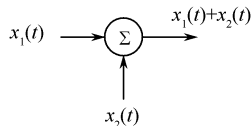
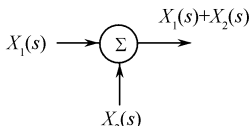
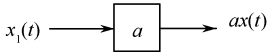
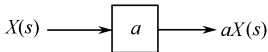
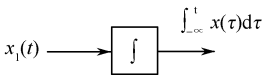
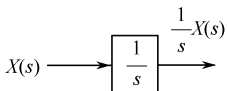
前面的学习中,我们采用数学模型(如微分方程)、系统函数等来描述一个连续时间系统所具有的输入输出关系。这是描述系统的基本而有效的方法,但对于系统的设计和实现往往是不够的。用方框图来描述系统,更加直观。

<sup>①</sup> 吴京等,《信号与系统分析》,长沙:国防科技大学出版社,2004,8

4.5.1 系统框图

在第 1 章学习了连续时间系统三种基本运算单元(加法器、标量乘法器和积分器)的时域模型,利用拉氏变换的线性性质和时域微分特性,容易得到其  $s$  域模型,如表 4.4 所示(设初始状态为零)。

表 4.4 基本运算单元的时域模型和  $s$  域模型

名 称	时 域 模 型	$s$ 域 模 型
加法器		
标量乘法器(数乘器)		
积分器		

根据系统框图中各个基本运算单元的运算关系列写出描述系统的微分方程,然后利用时域或复频域的方法求解方程。或者根据系统的时域框图画出其对应的  $s$  域框图,直接列写出  $s$  域的代数方程,求解响应的象函数,再求其逆变换得到响应的时域表达式。

**【例 4.5.1】** 某 LTI 系统的时域框图如图 4.11 所示,已知输入  $x(t) = u(t)$ ,求单位冲激响应  $h(t)$  和零状态响应  $y_{zs}(t)$ 。

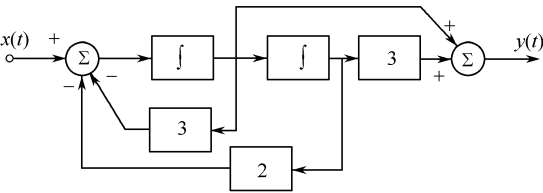


图 4.11 例 4.5.1 图

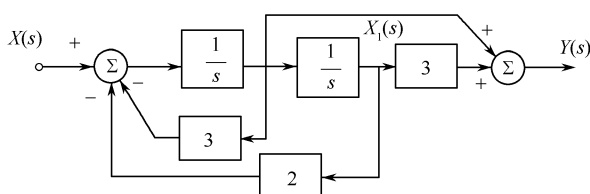
**解:** 系统的  $s$  域框图如图 4.12 所示。

设右端积分器输出为  $X_1(s)$ ,则其输入为  $sX_1(s)$ ,它也是左端积分器的输出,因而左端积分器的输入为  $s^2X_1(s)$ 。由左端加法器可得

$$s^2X_1(s) = -3sX_1(s) - 2X_1(s) + X(s)$$

即



图 4.12  $s$  域框图

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

由右端加法器可得

$$Y(s) = sX_1(s) + 3X_1(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} X(s)$$

所以系统函数

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

故系统的冲激响应为

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

输入

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s},$$

所以

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)X(s) = \frac{s+3}{s(s^2 + 3s + 2)} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

所以

$$y(t) = \frac{3}{2}u(t) - 2e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

## 4.5.2 信号流图

与方框图类似,信号流图也是用图解方法来描述系统,并且比方框图更为简便。

如图 4.13(a) 所示的方框图,可用一个输入指向输出的有向线段表示,如图 4.13(b) 所示。其中起点和终点的小圆圈表示系统中的变量或信号的点,称为**节点**。有向线段表示信号传输的路径,称为**支路**,信号的传输方向用箭头表示。系统函数  $H(s)$  标记在线段的一侧(一般是箭头的上方),称为该支路的**增益**。

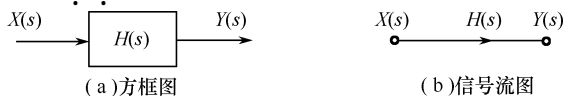


图 4.13 系统的流图表示方法

一般而言,信号流图是由若干节点和连接这些节点的有向支路组成的信号传递网络。它通过描述组成系统的各元部件之间的信号传递关系,来表示系统中各变量的因果关系,从而进一

步得到系统的输入输出关系。

基本运算单元的流图表示如图 4.14 所示。

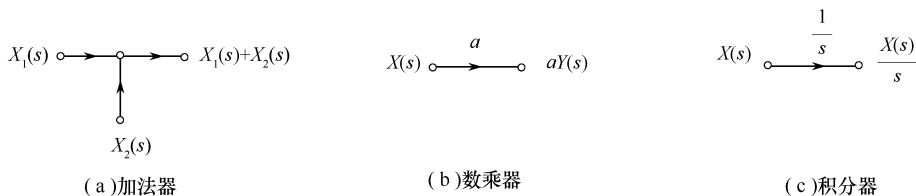


图 4.14 基本运算单元的流图表示

图 4.15 是一个典型的信号流图。它由 5 个节点( $x_0$ 、 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ )、6 条支路所组成,支路增益分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 。

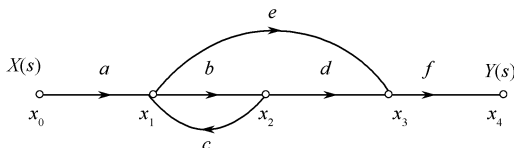


图 4.15 一个典型的信号流图

下面结合图 4.15 来介绍信号流图中的一些常用术语。

**节点和支路:**信号流图中的每个节点对应于一个变量或信号。连接两个节点之间的有向线段称为支路。支路增益就是该两节点间的系统函数。

**源节点:**只有输出支路、没有输入支路的节点,如图 4.15 中的  $x_0$ ,它一般代表网络中的输入变量,故也称输入节点。

**阱节点:**只有输入支路、没有输出支路的节点,如图 4.15 中的  $x_4$ ,它一般代表网络中的输出变量,故也称输出节点。

**混合节点:**既有输入支路,又有输出支路的节点,如图 4.15 中的其他节点。

**通路:**从任一节点出发沿着支路箭头方向连续经过各相连的不同支路和节点到达另一节点的路径称为通路。

**简单通路:**如果通路与任一节点相遇不多于一次,称为简单通路(或者开通路)。

**前向通路:**从源节点到阱节点的简单通路,称为前向通路。

如图 4.15 中,有两条前向通路: $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ 、 $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$

前向通路上各支路增益之乘积,称为前向通路总增益,图 4.15 中的两条前向通路,一条的总增益为  $abdf$ ,另一条为  $aef$ ;

**回路:**起点和终点在同一节点、且每个节点只通过一次的闭合通路称为简单回路,简称回路。回路中所有支路增益之乘积,称为回路增益。图 4.15 中只有一条回路  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ ,其增益为  $bc$ 。

**不接触回路:**回路与回路之间没有公共节点的回路称为不接触回路。图 4.15 中没有不接触回路。

信号流图的基本性质为:

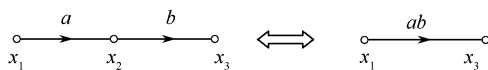
- (1) 信号只能沿箭头指向传播,支路输出值 = 输入节点变量  $\times$  支路增益;
- (2) 当节点有多个输入时,节点把所有入支路信号相加,并将和信号传送到与该节点相连

的所有出支路。

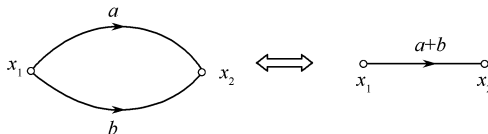
如图 4.15 中,  $x_1 = ax_0 + cx_2$ , 且  $x_3 = dx_2 + ex_1$

上述两条基本性质实质上表征了信号流图的线性性质。描述连续时间 LTI 系统的微分方程(方程组), 经过拉氏变换后是线性代数方程(方程组), 而信号流图描述的正是这类线性代数方程(方程组)。因此信号流图可以按照代数规则进行化简, 基本规则是:

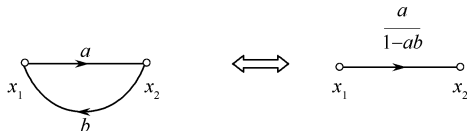
(1) 支路串联



(2) 支路并联



(3) 反馈支路



此时, 节点  $x_2$  和  $x_1$  之间的关系为

$$a(x_1 + bx_2) = x_2, \text{ 即 } x_2 = \frac{a}{1-ab}x_1$$

利用上述基本规则, 可以化简信号流图, 得到系统函数。

### 4.5.3 梅森公式

对于复杂的信号流图, 通过化简求总增益往往是非常繁琐的, 而利用梅森公式可直接求出系统函数。

梅森公式为

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n T_k \Delta_k \quad (4.53)$$

式中,  $H$  为系统函数;  $\Delta$  为流图的特征式,

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \cdots$$

其中

$\sum L_a$ : 所有回路增益之和;

$\sum L_b L_c$ : 所有两两互不接触回路的增益乘积之和;

$\sum L_d L_e L_f$ : 所有三个都互不接触回路的增益乘积之和;

$n$  为前向通路总数;

$T_k$  为第  $k$  条前向通路总增益;  $\Delta_k$  为第  $k$  条前向通路的流图因子式。将流图中第  $k$  条前向通路(包括经过的节点和支路)拆除后,余下部分的流图特征式。

梅森公式的证明可以参看有关书刊<sup>①</sup>,这里只举例说明它的应用。

【例 4.5.2】 如图 4.16 所示为某系统的信号流图,求系统函数  $H(s)$ 。

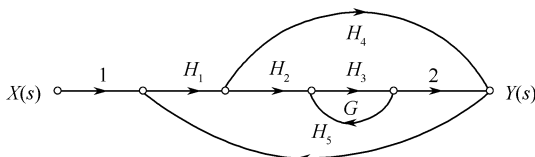


图 4.16 例 4.5.2 图

解:

三个回路:  $L_1 = H_3G$ ,  $L_2 = 2H_1H_2H_3H_5$ ,  $L_3 = H_1H_4H_5$

其中  $L_1$ 、 $L_3$  回路两两互不接触。所以流图特征式

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_3 \\ &= 1 - H_3G - 2H_1H_2H_3H_5 - H_1H_4H_5 + H_3GH_1H_4H_5\end{aligned}$$

两条前向通路,第一条:  $T_1 = 2H_1H_2H_3$ , 第二条:  $T_2 = H_1H_4$

拆除第一条后,无回路,故  $\Delta_1 = 1$

拆除第二条后,还有一个回路  $L_1$ ,故  $\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 - H_3G$

所以,系统函数

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2}{\Delta} \\ &= \frac{2H_1H_2H_3 + H_1H_4(1 - H_3G)}{1 - H_3G - 2H_1H_2H_3H_5 - H_1H_4H_5 + H_3GH_1H_4H_5}\end{aligned}$$

#### 4.5.4 系统模拟

系统模拟不是仿制原系统,而是数学意义上的模拟。根据被模拟系统(可能是已有的,也可能是需要设计的)的具体情况,求得一个模拟系统,使它与被模拟系统具有相同的数学模型(系统函数)。通过系统模拟,采用简单的易于实现的模型,来分析系统参数对系统性能的影响,从而确定系统参数。

对相同的系统函数往往有不同的实现方案,常用的有直接形式、级联形式和并联形式。

##### 4.5.4.1 直接实现

首先讨论二阶系统,设系统函数为

$$H(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b_1s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$$

<sup>①</sup> S. J. Mason, Feedback Theory, Further Properties of Signal Flow Graphs, Pro. IRE vol. 44p. 920, 1956

邱关源,《网络理论分析》,北京:科学出版社,1982

与梅森公式(4.53)对照,有两条前向通路: $T_1 = b_1 s^{-1}, \Delta_1 = 1; T_2 = b_0 s^{-2}, \Delta_2 = 1$ 。  
两个回路: $L_1 = -a_1 s^{-1}, L_2 = -a_0 s^{-2}$ ,没有两两不接触的回路。  
可以得到如图 4.17 所示的信号流图。

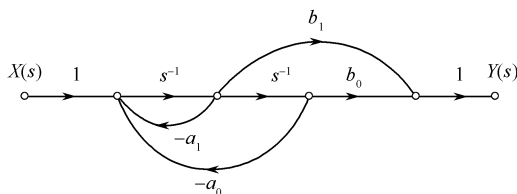


图 4.17 二阶系统直接形式的信号流图

需要注意的是,对于给定的系统函数,其直接实现形式并不是唯一的。如图 4.18 所示的信号流图也具有与图 4.17 完全相同的系统函数。

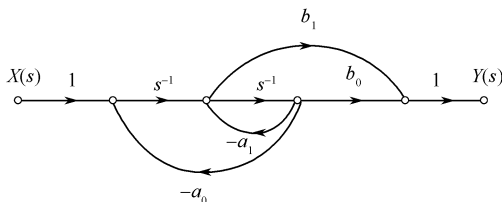
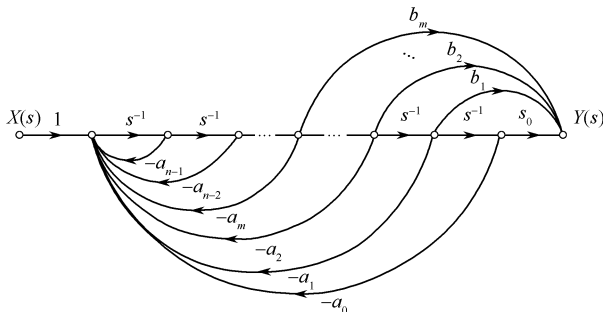


图 4.18 另一种直接形式的信号流图

以上分析很容易推广到高阶系统的情况。如系统函数( $m \leq n$ )

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \cdots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}} \end{aligned} \quad (4.54)$$

得到如图 4.19 所示直接形式的信号流图。

图 4.19  $n$  阶系统直接形式的信号流图

**【例 4.5.3】** 某连续时间系统系统函数为  $H(s) = \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3}$ , 请画出直接形式的信号流图。

**解:** 将  $H(s)$  写成

$$H(s) = \frac{2s^{-2} + 4s^{-3}}{1 + 3s^{-1} + 5s^{-2} + 3s^{-3}}$$

得到如图 4.20 所示的直接形式的信号流图。

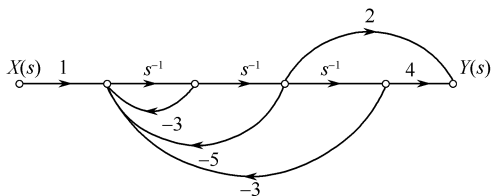


图 4.20 例 4.5.3 直接形式的信号流图

#### 4.5.4.2 级联和并联实现

级联形式是将系统函数  $H(s)$  分解成几个简单子系统(如一阶系统或二阶系统)函数的乘积,即

$$H(s) = \prod_{i=1}^N H_i(s)$$

如图 4.21 所示,其中每个子系统可以用直接形式实现。

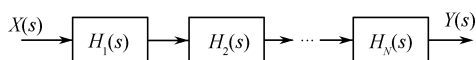


图 4.21 级联形式

并联形式是将系统函数  $H(s)$  分解成几个简单子系统函数的和,即

$$H(s) = \sum_{i=1}^N H_i(s)$$

如图 4.22 示,其中每个子系统可以用直接形式实现。

通常各个子系统选用一阶函数或二阶函数,分别称为一阶节和二阶节。

级联和并联实现形式调试比较方便,当调节某子系统参数时,只改变该子系统的零点或极点位置,对其余子系统的零极点位置没有影响,而对于直接实现形式,当改变某参数时,所有零极点位置都受到影响。

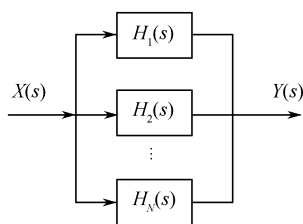


图 4.22 并联形式

**【例 4.5.4】** 例 4.5.3 中系统,请画出级联和并联形式的信号流图。

**解:**

(1) 级联形式

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+s^2+3)} = \frac{2}{s+1} \cdot \frac{s+2}{s^2+2s+3} \\ &= \frac{2s^{-1}}{1+s^{-1}} \cdot \frac{s^{-1}+2s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}} \end{aligned}$$

得到一种级联形式的信号流图如图 4.23 所示。

(2) 并联形式

$$H(s) = \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+3)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+2}{s^2+2s+3}$$

$$= \frac{s^{-1}}{1+s^{-1}} + \frac{-s^{-1}+s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}}$$

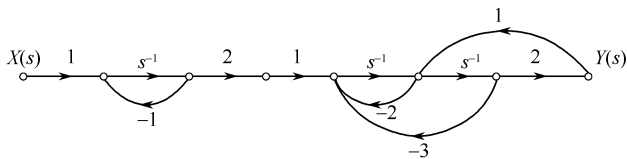


图 4.23 级联形式的信号流图

得到级联形式的信号流图如图 4.24 所示。

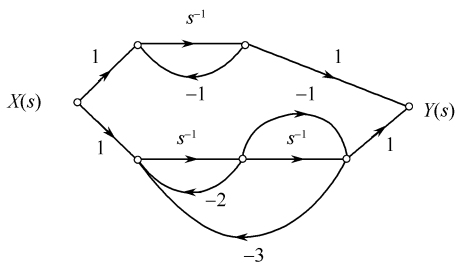


图 4.24 并联形式的信号流图

## 习 题 四

4.1-1 判断下列信号的傅里叶变换是否存在?单边拉氏变换是否存在?如果存在,请写出,并在  $s$  平面上画出拉氏变换的收敛域。

- (1)  $x(t) = u(t)$  (2)  $x(t) = tu(t)$   
 (3)  $x(t) = \delta(t)$  (4)  $x(t) = e^{-2t}u(t)$   
 (5)  $x(t) = e^{2t}u(t)$

4.1-2 当  $X(s)$  为有理多项式时,即  $X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ ,分母多项式  $A(s) = 0$  的根称为极点,分子多项式  $B(s) = 0$  的根称为零点。在  $s$  平面上标出极、零点位置,极点用  $\times$  表示,零点用  $\circ$  表示,称为极零点图。

对下列每个信号,大致画出其时域波形,求其拉氏变换并画出极零点图。总结极点位置与时域波形特点的关系。其中,  $a, \omega_0$  均为实常数。

- (1)  $u(t)$  (2)  $e^{at}u(t), a < 0$  (3)  $e^{at}u(t), a > 0$   
 (4)  $\sin(\omega_0 t)u(t)$  (5)  $e^{at}\sin(\omega_0 t)u(t), a < 0$  (6)  $e^{at}\sin(\omega_0 t)u(t), a > 0$

4.1-3 求下列信号的单边拉氏变换。

- (1)  $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$  (2)  $e^{-t}u(t-2)$  (3)  $(1+2t)e^{-t}u(t)$   
 (4)  $2\delta(t-t_0) + 3\delta(t)$  (5)  $(\sin t + 2\cos t)u(t)$  (6)  $(1 - \cos at)e^{-\beta t}u(t)$   
 (7)  $t^2u(t-1)$

4.1-4 若已知  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ,求下列各式的拉氏变换。(  $a > 0, a, b$  为实数)

- (1)  $e^{-\frac{t}{a}}x\left(\frac{t}{a}\right)$  (2)  $e^{-at}x\left(\frac{t}{a}\right)$  (3)  $\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}x\left(\frac{t}{a}\right)$

4.1-5 如果  $x(t) \rightarrow X(s)$ , 请证明  $-tx(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$

上式称为拉氏变换的复频域微分定理, 试用该结论求下列信号的拉氏变换。

(1)  $x(t) = tu(t)$       (2)  $x(t) = te^{at}u(t)$

4.1-6 如果  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ , 请证明  $\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty X(s_1) ds_1$ , 并利用此结论求以下信号的拉氏变换。

(1)  $x(t) = \frac{\sin t}{t}u(t)$       (2)  $x(t) = \frac{1}{t}(e^{-3t} - e^{-4t})u(t)$

4.1-7\* 如果  $x(t) \leftrightarrow X(s)$ , 且  $x(t)$  在  $t=0$  处不包含冲激信号  $\delta(t)$  及其各阶导数, 则:

$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ , 该性质称为初值定理。

如果  $x(t) \leftrightarrow X(s)$  且  $sF(s)$  的收敛域包含虚轴, 则:

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ , 该性质称为终值定理。

请利用拉氏变换的时域微分特性推导以上两个性质。

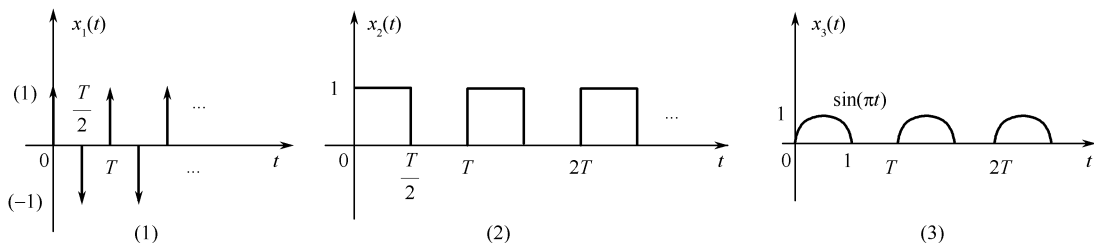
4.1-8\* 利用题 4.1-7 中的初值定理, 求下列  $X(s)$  对应的时域信号  $x(t)$  的初始值  $x(0^+)$ 。

(1)  $X(s) = \frac{1}{s(s+2)}$       (2)  $X(s) = \frac{s}{s+1}$

4.1-9\* 利用题 4.1-7 中的终值定理, 求下列  $X(s)$  对应的时域信号  $x(t)$  的稳定值  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 。

(1)  $X(s) = \frac{1}{s(s+2)}$       (2)  $X(s) = \frac{1}{s(s-2)}$

4.1-10\* 求题 4.1-10 图所示单边周期信号 ( $t=0$  时接入) 的拉氏变换。



题 4.1-10 图

4.2-1 求下列象函数的反变换。

(1)  $\frac{4s+5}{s^2+5s+6}$       (2)  $\frac{1}{s(s^2+5)}$

(3)  $\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}$       (4)  $\frac{e^{-s}}{4s(s^2+1)}$

(5)  $\frac{2s+4}{s^2+2s+5}$       (6)  $\frac{4s^2+11s+10}{2s^2+5s+3}$

4.2-2 求下列象函数的反变换。

(1)  $\frac{1-e^{-st_0}}{s+1}$       (2)  $\frac{s(1-e^{-s})}{s^2+\pi^2}$

(3)  $\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)^2$       (4)  $\frac{1}{1+e^{-s}}$

(5)  $\frac{1}{s(1-e^{-s})}$



4.3-1 利用拉氏变换求解下列微分方程:

$$(1) y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

$$\text{若 } x(t) = u(t), y(0^-) = 1$$

$$\text{若 } x(t) = \sin(2t)u(t), y(0^-) = 0$$

$$(2) y'(t) + ay(t) = e^{-at}u(t), y(0^-) = C (a, C \text{ 均为实常数})$$

$$(3) y'(t) + 2y(t) = 0, y(0^-) = 2$$

4.3-2 用拉氏变换求解因果系统

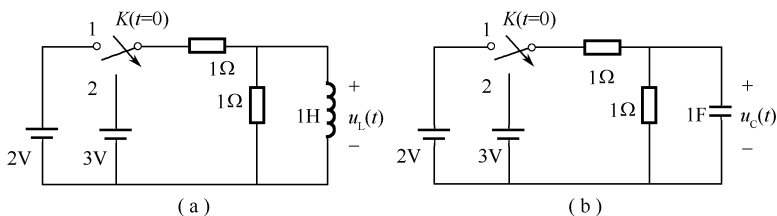
$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3x(t)$$

的零输入响应和零状态响应。设:

$$(1) x(t) = u(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = -1$$

$$(2) x(t) = e^{-t}u(t), y(0^-) = 0, y'(0^-) = 1$$

4.3-3 电路分别如题 4.3-3(a)、(b) 图所示,在  $t = 0$  前已处于稳定状态,开关  $K$  在  $t = 0$  时刻由 1 扳到 2,分别求  $u_L(t)$  和  $u_C(t)$ 。

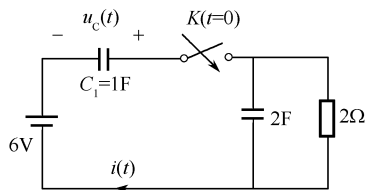


题 4.3-3 图

4.3-4 电路如题 4.3-4 图所示,已知电容  $C_1$  上的初始电压为 3V,  $t = 0$  时开关闭合,求全响应电流  $i(t)$ 。

4.4-1 已知线性时不变连续时间因果系统的系统函数  $H(s)$ ,证明系统在复指数信号  $e^{s_0 t}$ , ( $-\infty < t < \infty$ ) 的作用下,其零状态响应为  $H(s_0)e^{s_0 t}$  (其中  $s_0$  为复常数)。

4.4-2 若系统的单位阶跃响应为  $s(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$ ,为使输出零状态响应为  $y_{zs}(t) = (1 - e^{-2t} + te^{-2t})u(t)$ ,求输入信号  $x(t)$ 。



题 4.3-4 图

4.4-3 一线性系统,输入为  $x(t) = e^{-t}u(t)$  时的输出为  $y_{zs}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}\right)u(t)$ ,求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

4.4-4\* 某连续时间线性时不变系统为:  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$

(1) 求系统函数  $H(s)$ ,并画出极零点图。

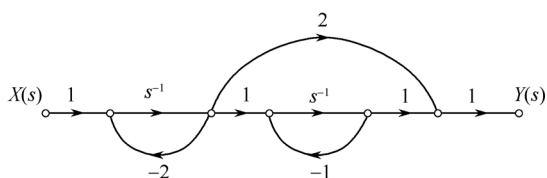
(2) 对下列三种情况中的每一种,确定单位冲激响应  $h(t)$ 。

① 系统是稳定的;

② 系统是因果的;

③ 系统既不是稳定,也不是因果的。

4.5-1 已知某因果系统的信号流图如题 4.5-1 图所示,

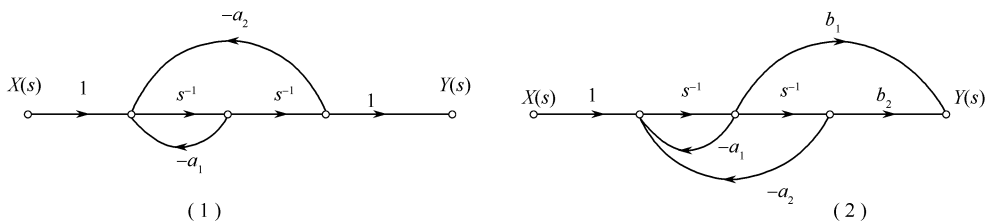


题 4.5-1 图

(1) 求系统函数;

(2) 画出收敛域,并判断系统的稳定性。

4.5-2 系统的信号流图如题 4.5-2 图所示,求系统函数。



题 4.5-2 图

4.5-3 已知连续时间 LTI 系统的系统函数,求它们的直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式的信号流图。

$$(1) H(s) = \frac{5s + 7}{s^3 + 5s^2 + 5s + 4}$$

$$(2) H(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)^2 (s + 1)}$$

## 第 5 章 连续时间滤波器

滤波是信号与系统领域的一个重要概念。这主要是因为激励信号  $x(t)$  通过线性时不变系统  $h(t)$  后,其频谱  $X(j\omega)$  将不可避免地受到系统频率响应  $H(j\omega)$  的影响,使得最终输出信号  $y(t)$  的频谱变为  $X(j\omega)H(j\omega)$ 。 $H(j\omega)$  的这种频谱变换作用可能会改变信号中各频率分量的相对大小和相位,使得信号在传输过程中出现失真,而另外一方面,实际在各种不同的应用中,有时会希望信号通过滤波器系统后产生“预定”的失真。本章将从线性时不变系统的频率响应  $H(j\omega)$  入手,向大家介绍线性时不变系统对激励信号频谱变换作用的具体体现,建立信号经过线性系统传输的一些重要概念,包括无失真传输条件、理想滤波器模型、实际可实现的滤波系统,以及系统函数极零点对滤波器特性的影响等。

### 5.1 线性时不变系统的频率响应

考察一个单位冲激响应为  $h(t)$  的线性时不变系统对复指数信号  $e^{j\omega t}$  ( $-\infty < t < \infty$ ) 的响应,由第 2 章可知,系统的输出为:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{j\omega t} * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (5.1)$$

式(5.1)中  $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  只与频率  $\omega$  有关,而与时间无关。从第 3 章可知,它实际上就是单位冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换  $H(j\omega)$ ,即

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.2)$$

将式(5.2)代入式(5.1)可得

$$e^{j\omega t} \rightarrow y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega) \quad (5.3)$$

式(5.3)表示,复指数信号  $e^{j\omega t}$  作为线性时不变系统的输入激励时,其输出响应是同样的复指数信号,只是幅度乘以一个复常数  $H(j\omega)$ 。

同理,可以得到

$$e^{-j\omega t} \rightarrow y(t) = e^{-j\omega t} \cdot H(-j\omega) \quad (5.4)$$

将式(5.3)和式(5.4)相加,可以得到

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \rightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t} \cdot H(-j\omega) \quad (5.5)$$

由于  $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$ ,而对于实系统来说其傅里叶变换的频谱具有共轭对称性( $|H(-j\omega)| = |H(j\omega)|$ ,  $\angle H(-j\omega) = -\angle H(j\omega)$ ),故  $H(-j\omega) = |H(-j\omega)| e^{j\angle H(-j\omega)} = |H(j\omega)| e^{-j\angle H(j\omega)}$ ,所以式(5.5)可简化为

$$\begin{aligned}\cos\omega t \rightarrow y(t) &= |H(j\omega)| \frac{e^{j[\omega t + \angle H(j\omega)]} + e^{-j[\omega t + \angle H(j\omega)]}}{2} \\ &= |H(j\omega)| \cos[\omega t + \angle H(j\omega)]\end{aligned}\quad (5.6)$$

类似,对于谐波信号  $\cos(\omega t + \theta)$  输入有

$$\cos(\omega t + \theta) \rightarrow y(t) = |H(j\omega)| \cos[\omega t + \theta + \angle H(j\omega)] \quad (5.7)$$

根据式(5.7),可知线性时不变系统对谐波激励信号  $\cos(\omega t + \theta)$  的作用体现在两个方面:附加增益  $|H(j\omega)|$  和附加相移  $\angle H(j\omega)$ 。

下面举例说明。

**【例 5.1.1】** 已知因果 LTI 系统微分方程  $\frac{d}{dt}y(t) + 10\sqrt{3}y(t) = 40x(t)$ , 当  $x(t) = 5\cos(10t + 50^\circ)$  时,试求其输出响应  $y(t)$ 。

**解:**根据第 4 章可以从 LTI 系统的微分方程得到其系统函数为

$$H(s) = \frac{40}{s + 10\sqrt{3}}, \operatorname{Re}[s] > -10\sqrt{3}$$

由于系统函数收敛域包含  $j\omega$  轴,其傅里叶变换为

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{40}{j\omega + 10\sqrt{3}}$$

对确定的  $\omega = 10$ ,可知

$$\begin{cases} |H(j10)| = 2 \\ \angle |H(j10)| = -30^\circ \end{cases}$$

根据式(5.7)有

$$x(t) = 5\cos(10t + 50^\circ) \rightarrow y(t) = 5 |H(j10)| \cos[10t + 50^\circ + \angle H(j10)] = 10\cos(10t + 20^\circ)$$

如图 5.1 所示。

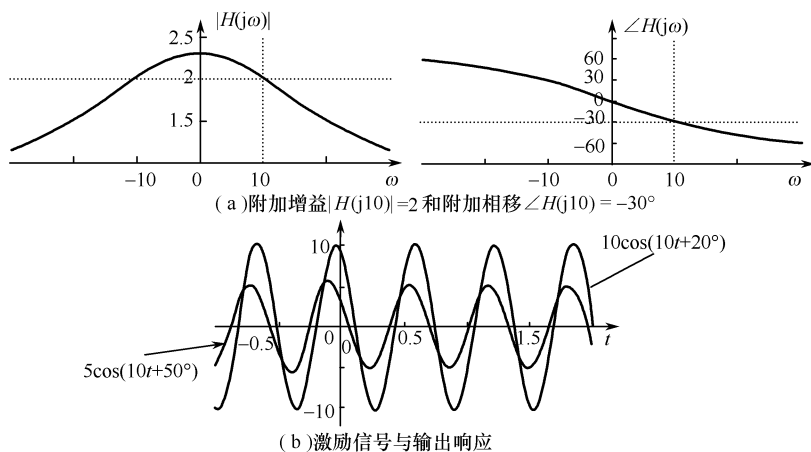


图 5.1 线性时不变系统对正弦激励信号的附加增益与附加相移作用

由于傅里叶变换的实质是将信号  $x(t)$  分解为“不同频率”的复指数(谐波)信号的叠加,所以,在第 3 章连续时间傅里叶变换的卷积定理基础上,我们可以进一步从频域角度来理解线性时不变系统对激励信号  $x(t)$  的作用:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (5.8)$$

式(5.8)表示:线性时不变系统改变了激励信号  $x(t)$  的频谱  $X(j\omega)$ , 将其乘以  $H(j\omega)$  转化为响应信号频谱  $X(j\omega)H(j\omega)$ , 起到了频谱变换器的作用。由于  $H(j\omega)$  对激励信号频谱的变换作用是覆盖  $\omega \in (-\infty, \infty)$  整个频带的, 通常我们称其为系统的**频率响应**, 简称**频响**。

利用复函数的模—相表示, 可以更加详细地说明频率响应  $H(j\omega)$  的频谱变换作用:

$$\begin{cases} |Y(j\omega)| = |X(j\omega)| |H(j\omega)| \\ \angle Y(j\omega) = \angle X(j\omega) + \angle H(j\omega) \end{cases} \quad (5.9)$$

式(5.9)中  $|H(j\omega)|$  对  $X(j\omega)$  的各个频谱分量进行加权, 使得激励信号  $x(t)$  某些频率分量增强, 另一些频率分量削弱或不变, 通常称为系统的**幅频响应**(或**幅频特性**); 而  $\angle H(j\omega)$  可以用来表征系统对激励信号  $x(t)$  各频率分量相对位置的改变, 它使得激励信号  $x(t)$  每个频率分量在传输过程中都产生各自的相位移, 通常称为系统的**相频响应**(或**相频特性**)。系统的幅频响应  $|H(j\omega)|$  和相频响应  $\angle H(j\omega)$  一起构成了系统的频率响应  $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$ 。

**【例 5.1.2】** 已知稳定 LTI 系统的系统函数, 求系统的频率响应。

$$(1) H(s) = e^{-st_0}; \quad (2) H(s) = s.$$

**解:** (1) 系统函数全平面收敛, 频响为  $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$ 。由于  $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$ , 幅频响应  $|H(j\omega)|$  和相频响应  $\angle H(j\omega)$  [见图 5.2(a)] 为

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = 1 \\ \angle H(j\omega) = -\omega t_0 \end{cases}$$

从图 5.2(a) 看, 该系统幅频响应为单位常数 1, 相频响应为过原点斜率为  $-t_0$  的直线。如果激励信号为谐波信号  $\cos(\omega_0 t)$ , 则输出响应信号为同频同幅度的谐波信号  $\cos[\omega_0(t - t_0)]$ , 相比激励信号仅仅在时间轴上延迟了  $t_0$  [见图 5.2(b)]。

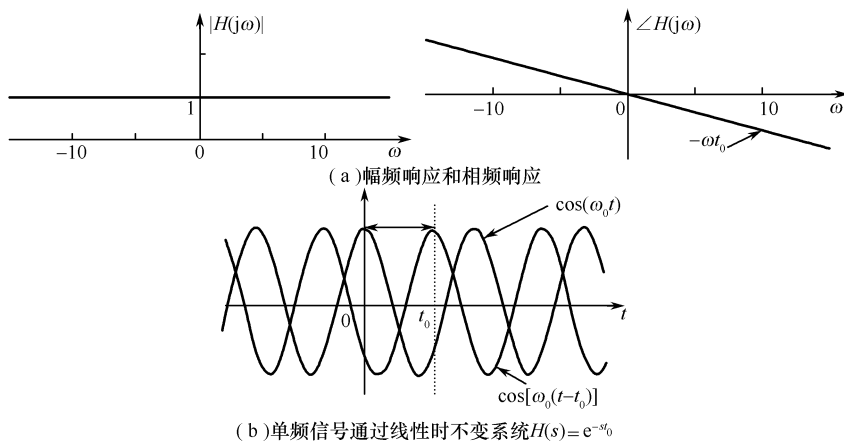


图 5.2 线性时不变系统  $H(s) = e^{-st_0}$  的频率响应

(2) 系统函数全平面收敛, 频响为  $H(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$ 。相应

$$|H(j\omega)| = |\omega|, \angle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega < 0 \end{cases}$$

幅频响应  $|H(j\omega)|$  和相频响应  $\angle H(j\omega)$  见图 5.3(a)。从图 5.3(a) 可以看到当  $\omega > 0$  时, 该系统幅频响应是随频率线性递增的, 相频响应为常数  $\frac{\pi}{2}$ 。如果激励信号为谐波信号  $\cos(\omega_0 t)$ , 则输出响应信号为  $\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ , 系统对激励信号进行了微分。对于实际激励信号来说, 总是不可避免含有噪声分量, 由于  $|H(j\omega)| = |\omega|$ , 这些快变化的高频噪声分量通过该系统后得到了增强, 见图 5.3(c)。设想, 如果  $|H(j\omega)| = 1/|\omega|$ , 则这些快变化的高频噪声分量通过系统后会衰减, 因此, 实际中尽量避免使用微分器, 而通常将其转化为积分运算来实现。

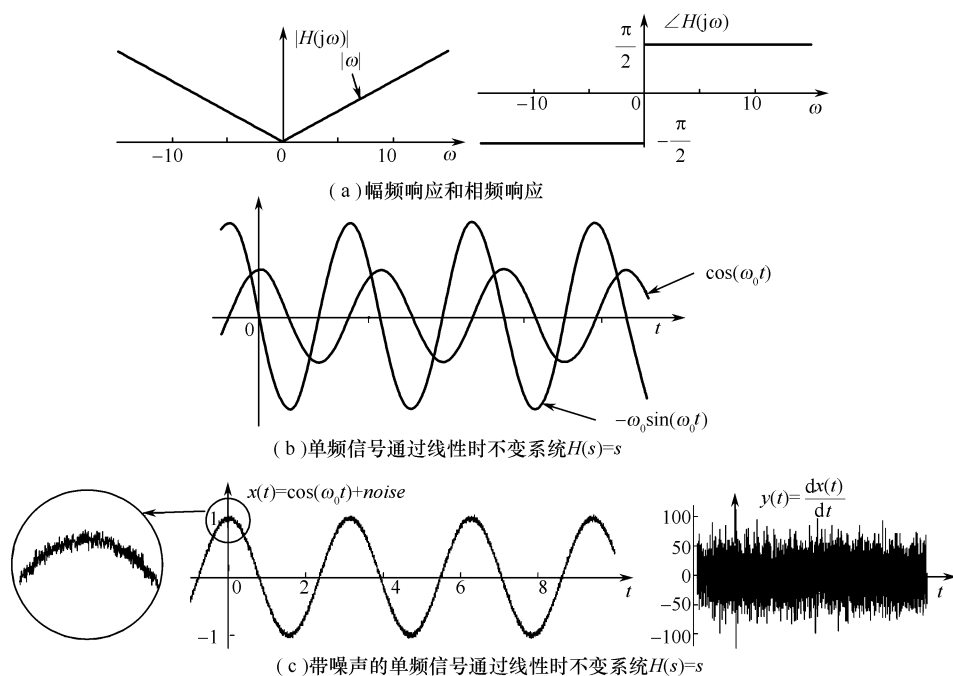


图 5.3 线性时不变系统  $H(s) = s$  的频率响应

**【例 5.1.3】** 已知 LTI 系统的系统函数  $H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ,  $\text{Re}[s] > -1$ , 求系统对激励信号  $e^{j\omega_0 t}u(t)$  和  $\cos(\omega_0 t)u(t)$  的稳态响应。

解: 由于

$$e^{j\omega_0 t}u(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \text{Re}[s] > 0$$

根据第 4 章所学的拉氏变换卷积定理有

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-j\omega_0)}, \quad \text{Re}[s] > 0$$

对  $Y(s)$  进行部分分式展开:

$$Y(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{H(s) \Big|_{s=j\omega_0}}{s-j\omega_0} = \underbrace{\frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}}_{Y_n(s)} + \underbrace{\frac{H(j\omega_0)}{s-j\omega_0}}_{Y_f(s)}$$

于是

$$y(t) = \underbrace{k_1 e^{-t} u(t) + k_2 e^{-2t} u(t)}_{y_n(t)} + \underbrace{H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} u(t)}_{y_f(t)}$$

即 LTI 系统对激励信号  $e^{j\omega_0 t} u(t)$  的响应分为两部分:固有响应  $y_n(t)$  和强迫响应  $y_f(t)$ 。对于因果稳定的 LTI 系统来说,其固有响应是瞬态的,将随时间  $t \rightarrow \infty$  而逐渐趋于 0,而强迫响应  $y_f(t) = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} u(t)$  是稳态的。同样,根据式(5.7)可知,当激励信号为  $\cos(\omega_0 t) u(t)$  时,系统稳态响应为  $|H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)] u(t)$ 。可见,所谓“频率响应”特性指的是系统在谐波信号激励之下,稳态响应随信号频率的变化情况,包括幅度随频率的变化以及相位随频率的变化两个方面。

## 5.2 线性时不变系统中信号的传输

### 5.2.1 无失真传输条件

一般情况下,如果激励信号  $x(t)$  经过一个频响为  $H(j\omega)$  的 LTI 系统,输出响应为  $y(t)$ 。系统的响应  $y(t)$  波形与激励信号  $x(t)$  波形是不相同,我们称信号在传输的过程中产生了“失真”。然而,在一些应用场合中,我们希望信号通过线性系统后,除了幅度改变及增加一定的延迟时间之外,响应信号  $y(t)$  波形与激励信号  $x(t)$  波形相同,即信号在传输过程中不产生任何失真,如通信系统中语音信号的放大和衰减。为了在更多的实际应用中,使得信号在传输过程中不失真或者说失真最小,有必要研究无失真传输的条件。

从时域上看,无失真传输系统的响应信号  $y(t)$  与激励信号  $x(t)$  的关系为

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (5.10)$$

式(5.10)中  $K$  为非 0 实常数,  $t_0$  为大于 0 的实常数。

如果激励信号  $x(t)$  经过一个频响为  $H(j\omega)$  的 LTI 系统,输出响应为  $y(t)$ 。当满足式(5.10)的条件时,响应信号  $y(t)$  的幅度是激励信号  $x(t)$  幅度的  $K$  倍,虽然  $y(t)$  在时间上滞后了  $t_0$  秒,但波形形状不变,如图 5.4 所示。

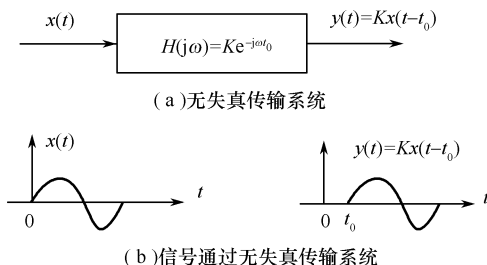


图 5.4 无失真传输

下面从频域角度讨论满足式(5.10),实现无失真传输对频响  $H(j\omega)$  提出的要求。

设响应信号  $y(t)$  的频谱为  $Y(j\omega)$ ,激励信号  $x(t)$  的频谱为  $X(j\omega)$ ,借助第 3 章所学傅里叶变换的延时定理,对式(5.10)两边同时作傅里叶变换可得

$$Y(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (5.11)$$

根据第 3 章的卷积定理还有

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad (5.12)$$

联合式(5.11)和式(5.12)可以得到

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_0} \quad (5.13)$$

式(5.13)就是对系统的频响特性提出的无失真传输条件,即系统的幅频特性应该满足

$$|H(j\omega)| = K, (-\infty < \omega < \infty) \quad (5.14.a)$$

相频特性满足

$$\angle H(j\omega) = -\omega \cdot t_0 \quad (t_0 \geq 0) \quad (5.14.b)$$

式(5.14.a)和式(5.14.b)表明:欲使信号在通过线性系统时不产生任何失真,必须在信号的全部频带内,要求系统幅频特性是一常数,如图5.5(a)所示,相频特性是一通过原点的直线,如图5.5(b)所示。对线性相位系统来说,系统相频特性表明了信号的各个频率分量在通过系统时,系统对它所产生的附加相移。相频特性的斜率就是该频率分量在时域产生的时延。

式(5.14)以及图5.5的要求可以从物理概念上得到直观的解释。

(1) 由于无失真系统的幅频特性在 $(-\infty < \omega < \infty)$ 整个频率范围内为非零实常数,保证了激励信号所有频率分量通过系统后,仍保持原有的幅度比例关系,即响应中各频率分量幅度的相对大小将与激励信号的情况一样,从而不产生幅度失真;

(2) 由于无失真系统的相频特性在整个频率范围内是过坐标原点的一条斜率为负的直线,则激励信号各频率分量通过系统后的附加相移与频率成正比,从而保证了响应中所有频率分量通过系统后都有相同延时,即响应中各频率分量的相对位置将与激励信号的一样,从而不产生相位失真。

可见导致信号失真的原因不外乎两种:

(1) **幅度失真**:由于幅频响应 $|H(j\omega)|$ 导致信号频谱的模改变而引起的失真。

(2) **相位失真**:由于相频响应 $\angle H(j\omega)$ 导致信号频谱的相位改变引起的失真。

下面举例说明。

**【例5.2.1】** 设激励信号 $x(t)$ 波形如图5.6(a)所示。它由基波与二次谐波两个频率分量组成,表示式为: $x(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(2\omega_1 t)$ ,响应信号 $y(t)$ 的表示式为

$$\begin{aligned} y(t) &= K_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + K_2 \sin(2\omega_1 t - \varphi_2) \\ &= K_1 \sin[\omega_1(t - \varphi_1/\omega_1)] + K_2 \sin[2\omega_1(t - \varphi_2/2\omega_1)] \end{aligned}$$

求不产生幅度失真与相位失真必须满足的条件。

**解:**为了使基波与二次谐波两个频率分量的幅度相对大小保持原有的比例关系,以保证不产生幅度失真,应有: $K_1/K_2 = 1$ 。图5.6(b)中画出了无失真传输后的 $y(t)$ 波形;而图5.6(c)中则是幅度失真的情况。

在满足 $K_1/K_2 = 1$ 条件下,为了使基波与二次谐波两个频率分量得到相同的延迟时间,以保证不产生相位失真,应有: $\varphi_1/\omega_1 = \varphi_2/2\omega_1 = t_0$ ,因此各个谐波分量的相移必须满足关系:

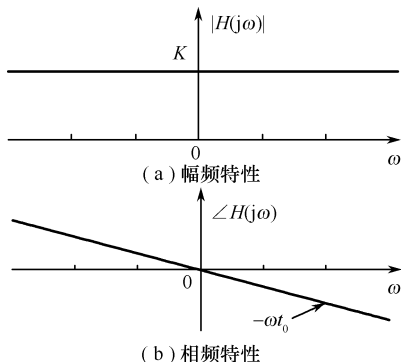


图5.5 无失真系统频响特性



$\varphi_1/\varphi_1 = \omega_1/2\omega_1$ 。这个关系很容易推广到其他高次谐波频率。

于是可以得出结论:为使信号传输时不产生相位失真,信号通过线性系统时谐波频率的相移必须与其频率成正比,也即系统的相频特性应该是一条经过原点的直线,即  $\varphi(\omega) = -\omega t_0$ 。这正是式(5.14(b))及图 5.6(b) 所得到的结果。显然,信号通过系统的延迟时间  $t_0$  即为相频特性的斜率:  $d\varphi(\omega)/d\omega = -t_0$ 。图 5.6(d) 是相位失真的情况,由于不同频率分量受相频特性影响所产生的时移不同,即使频率分量幅度的相对大小保持不变,叠加起来的信号波形与图 5.6(a) 中的  $x(t)$  是不一样的。

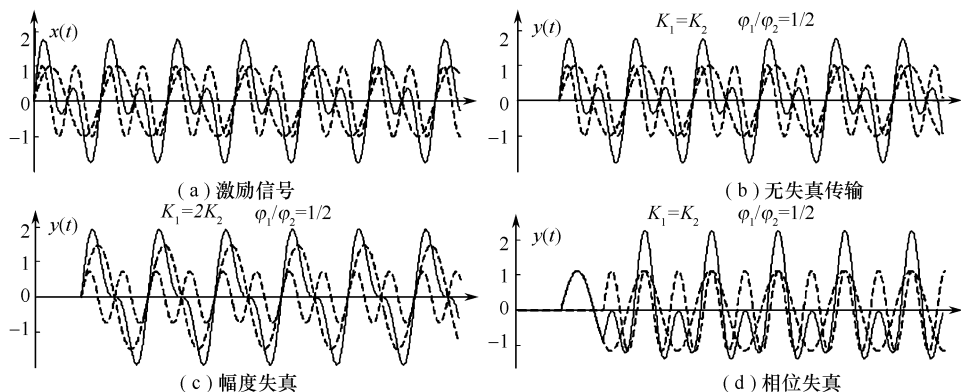


图 5.6 信号传输的幅度失真和相位失真

图 5.6 说明信号在传输过程中,相频特性或幅频特性发生改变都会引起信号波形的改变,即发生失真。

前面式(5.13)和式(5.14)说明了为满足无失真传输对于系统函数  $H(j\omega)$  的要求,这是就针对频域方面提出的。如果用时域特性表示,即对式(5.4)作傅里叶反变换,可以得到无失真传输系统的冲激响应

$$h(t) = K\delta(t - t_0) \quad (5.15)$$

式(5.15)的结果表明:当信号通过线性系统时,为了不产生失真,系统的冲激响应应该是冲激函数,冲激出现的时间滞后  $t_0$ 。

### 5.2.2 信号的无失真传输

前面 5.2.1 节是从系统的角度来讨论信号的无失真传输问题。实际上,满足式(5.13)或式(5.15)的无失真传输系统不仅无法实现,而且也是不必要的。一方面,实际系统不可能在整个频率范围内保持恒定不变的幅频特性和与频率成正比的相频特性;另一方面,我们常用的信号的频率范围有限或存在有效频带,其内集中了信号绝大部分的平均功率或能量。工程上若系统在被传输信号的带宽范围内满足不失真条件,则认为该系统对此信号是不失真系统。

下面,我们从信号的角度来理解这个问题。

对于能量信号  $x(t)$  来说,第 3 章得到帕塞瓦尔等式:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.16)$$

式(5.16)表示:从时域角度和频域角度对信号的能量进行分析是等价的。

根据式(5.16),  $|X(j\omega)|^2$  可看成  $x(t)$  的能谱密度, 即  $\frac{1}{2\pi} |X(j\omega)|^2 d\omega$  可以认为是信号  $x(t)$  在频率  $(\omega, \omega + d\omega)$  这样一个无限小的频带内所占有的能量(如图 5.7 所示)。

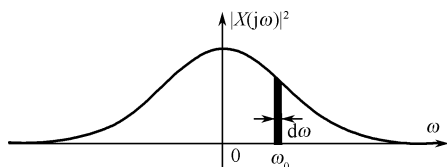


图 5.7 信号的能量谱密度

如果能量信号  $x(t)$  为实信号, 那么其频谱具有共轭对称性  $X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ , 式(5.16)可进一步转化为

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.17)$$

式(5.17)表示: 实信号的能量可以用  $\omega \in (0, \infty)$  上的能谱密度确定(仅仅系数变为  $1/\pi$ )。根据式(5.17), 可以比较方便计算区间  $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$  上, 信号的频谱能量

$$\Delta E = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.18)$$

如果  $x(t)$  是一个低频振荡信号, 那么信号的频谱能量就会集中在  $\omega = 0$  附近的一个频率范围内, 见图 5.8(a); 如果  $x(t)$  是一个高频振荡信号, 那么信号的频谱能量就会集中在  $\omega = \omega_0$  附近的一个频率范围内, 见图 5.8(b)。

显然对于图 5.8(a) 和图 5.8(b) 所示的两种信号而言, 图 5.8(c) 所示系统在其频率范围或有效频带内满足式(5.14(a)), 故图 5.8(a) 和图 5.8(b) 所示的两种信号在通过图 5.8(c) 所示的系统后, 各自能量谱密度  $|X(j\omega)|^2$  均保持不变, 即响应中各频率分量幅度的大小与激励信号的情况一样, 无幅度失真。

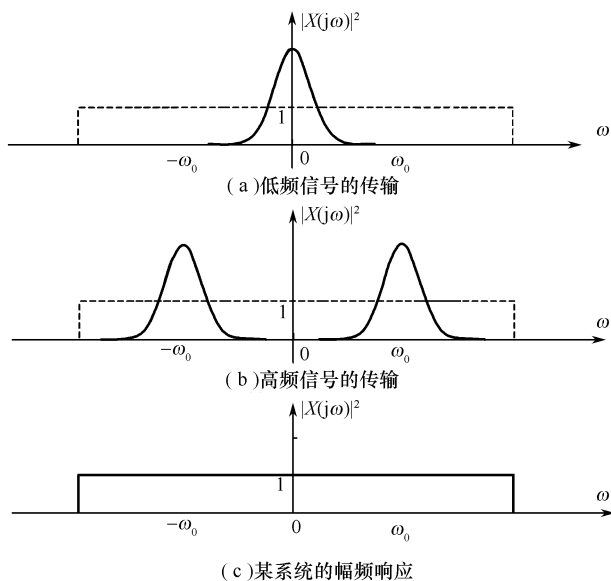


图 5.8 信号的传输

一般情况下,连续时间信号的傅里叶变换都是复数值,即连续时间信号  $x(t)$  的频谱  $X(j\omega)$  是一个复函数,并且可用其实部和虚部或者用其模和相位来表示:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \quad (5.19)$$

如果图 5.8(c) 所示系统具有线性相频特性,那么它在图 5.8(a) 和图 5.8(b) 所示的两种信号有效能量频谱(能量频谱不为零) 范围内满足式(5.14(b)),从而保证了响应中各频率分量的相对位置将与激励信号的一样,无相位失真。

可见,对于图 5.8(a) 和图 5.8(b) 所示的两种信号而言,图 5.8(c) 所示系统就是无失真传输系统。同理,如果仅仅对图 5.8(a) 所示的信号进行传输,图 5.9(b) 所示系统也是无失真传输系统。由于图 5.8(a) 信号有效频带范围更小,图 5.9(b) 所示系统近似满足式(5.14(a)) 和式(5.14(b)) 的频带宽度要求,可比图 5.8(c) 所示系统的频带宽度更窄。

所以,从能量的角度考虑,常用的线性时不变系统在实现无失真传输时,只需要像图 5.8(c) 或图 5.9(b) 那样,在一个有限的频率范围内(通常略大于被传输信号的带宽范围) 近似为无失真传输系统就可以了。

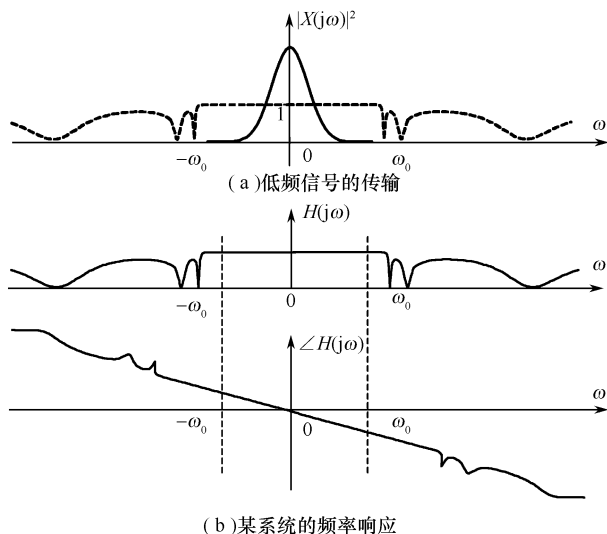


图 5.9 低频信号的无失真传输

下面举例说明。

**【例 5.2.2】** 图 5.10 所示系统能否对信号  $\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} \cos\omega_0 t$  实现无失真传输?

**解:** 由图 5.10 有:  $H(j\omega) = [G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)]e^{-j\omega t_d}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_c} [G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

由时域卷积定理,信号  $\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} \cos\omega_0 t$  通过图 5.10 所示系统后,输出响应的频谱为

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

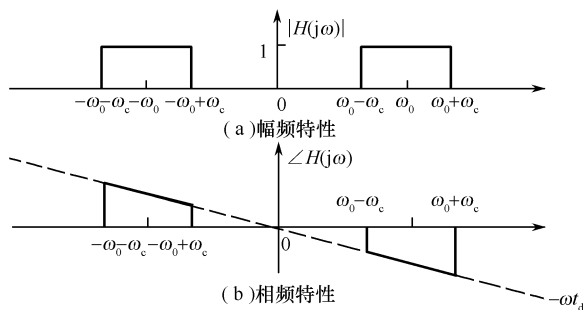


图 5.10 某系统的频率响应

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega_c} [G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)] [G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)] e^{-j\omega t_d} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega_c} [G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)] e^{-j\omega t_d}
 \end{aligned}$$

对其作傅里叶反变换,可以得到输出响应的时域表示:

$$y(t) = \frac{\sin[\omega_c(t - t_d)]}{\omega_c(t - t_d)} \cos[\omega_0(t - t_d)] = x(t - t_d)$$

可见,图 5.10 所示系统对信号  $\frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \cos(\omega_0 t)$  实现了无失真传输。

实际上,在某些情况下,相位失真可能是重要的;而在另一些情况下,幅度失真可能是重要的。例如,人类听觉系统一个众所周知的特性就是对相位相对不灵敏。具体一点就是,如果某个元音信号的频谱发生一些失真,使得其相位函数发生变化,而模函数保持不变时,虽然该失真的元音信号在时域中的波形看起来可能与原信号有很大的不同,但是这一影响对人类的听觉系统来说是可以忽略的,即人耳基本感觉不到信号的失真。在工程实际中,不同的应用场合,对幅度失真和相位失真的敏感程度不同,在被传输信号的带宽范围内,要求幅频响应和相频响应近似满足无失真条件的技术指标也会有所不同。

### 5.2.3 信号的滤波

实际在各种不同应用中,有时会希望信号通过系统后产生“预定”的失真,如脉冲电路中的整形电路。这种情况与无失真传输这一要求相反,我们需要有意识地利用系统引起失真来形成某种特定的波形,比如可能会有改变一个信号中各频率分量的相对大小和相位,使之产生“预定”的幅度失真和相位失真这样一类的要求,实现这些要求的过程称为滤波。

对于线性时不变系统来说,由于系统响应  $y(t)$  的频谱  $Y(j\omega)$  等于激励信号  $x(t)$  的频谱  $X(j\omega)$  乘以频响  $H(j\omega)$ 。因此,通过恰当地选取系统的频率响应  $H(j\omega)$ ,就可以利用线性时不变系统的频响特性,很好地实现对信号的滤波。可见,任何线性系统都可看作具有频率选择特性的滤波器,它可能会全部消除信号某些频率分量,但是不会产生新的频率分量。频率选择性滤波器也是线性时不变系统一个很重要的应用。

在通信、图像处理、信号获取等工程应用中,频率选择性滤波器几乎是必不可少的基本单元,它专门设计成基本无失真地通过某些频率,而显著地衰减或去除另一些频率分量,其应用极为广泛。例如,通信系统的基础就是利用许多频率选择性滤波器把来自各个信源的各种待传

输的信号,安排在彼此分开的频带内,然后组合起来一齐发送,如图 5.11(a) 所示;而在接收端,还是利用这类滤波器从单一信道内提取出各路信号,如图 5.11(b) 所示。如果在一个音频录制系统中,噪声信号比录制的音乐或声音信号的频率要高的话,那么,就可以通过频率选择性滤波器将它滤除掉。

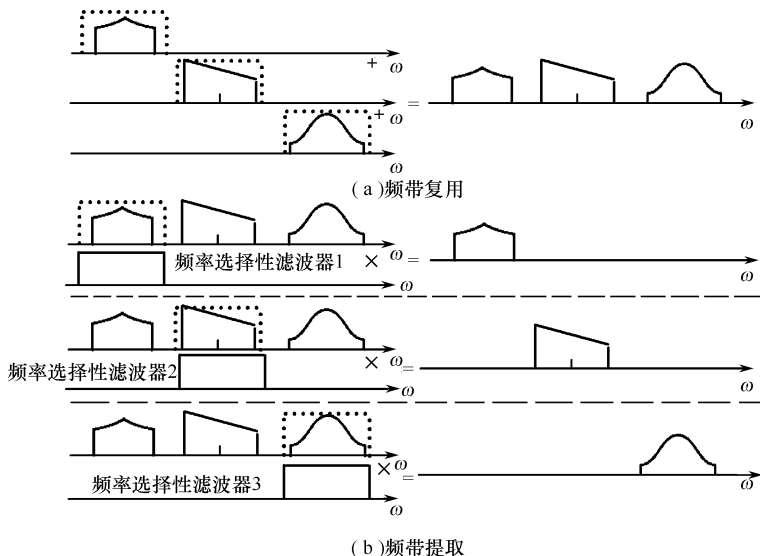


图 5.11 通信系统中频率选择性滤波器的应用

## 5.3 理想和实际滤波器

### 5.3.1 理想滤波器的频域特性

由于频率选择性的普遍应用,已经形成了一组被广泛接受的、用来描述频率选择性滤波器特性的术语。例如:阻带、通带、截止频率、过渡带等。特别是,由于应用的目的不同,被一个频率选择性滤波器完全地或近似地选取要通过的频率特性有很大的变化,因此,频率选择性滤波器还被划分为了几种广泛接受的基本类型,并且有特定的名称来标明它们的功能。例如:低通滤波器,高通滤波器,带通滤波器,带阻滤波器等。

下面我们先从理想滤波器入手,以低通滤波器为主,向大家介绍滤波中用到的这些术语的具体含义,以便大家在后续的学习中能更好理解线性时不变系统对信号的滤波作用。

**理想频率选择性滤波器**是这样一种滤波器,其频率特性在某一个(或几个)频段内频率响应为常数,而在其它频段内频率响应等于零,它无失真地通过一组频率分量,并全部阻止掉所有其他频率分量。

由于无失真传输允许系统具有线性相频特性,因此,截止频率为  $\omega_c$  的理想低通滤波器的频率响应为

$$H_{lp}(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (5.20)$$

式(5.20)中  $t_0 > 0$ , 其幅频特性和相频特性分别如图 5.12(a) 和图 5.12(b) 所示。

理想低通滤波器能够无失真传输位于  $[-\omega_c, \omega_c]$  范围内的频率, 此频率范围也称为低通滤波器的**通频带**, 此范围之外的频率分量不能出现在输出中(被彻底的抑制)。

由图 5.12(a) 可以看出, 滤波器允许信号完全通过的频段称为滤波器的**通带**, 完全不允许信号通过的频段称为**阻带**; **截止频率**  $\omega_c$  是用来标明要通过的频率与要阻止的频率之间的边界, 即截止频率是通带和阻带的边界频率, 而**过渡带**指由通带内接近无失真传输到阻带内最大衰减这一过渡区, 对理想低通滤波器来说过渡带为 0。

按照系统频率响应  $H(j\omega)$  阻带和通带的不同, 可将其分为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器等。

**低通滤波器**就是允许通过低频分量, 而衰减或阻止较高频率分量的滤波器, 如图 5.12 所示, 通频带  $\omega < \omega_c$ , 包含  $\omega = 0$  附近的频率。

**高通滤波器**就是允许通过高频分量, 而衰减或阻止较低频率分量的滤波器, 如图 5.13 所示, 通频带  $\omega > \omega_c$ 。

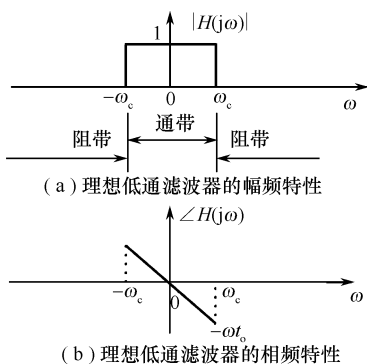


图 5.12 连续时间理想低通滤波器的频率响应

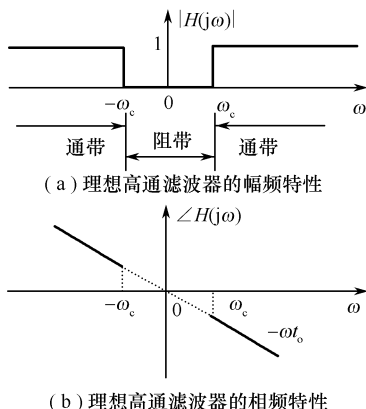


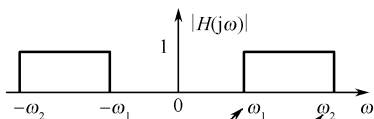
图 5.13 连续时间理想高通滤波器的频率响应

**带通滤波器**就是允许通过某一频带范围内的频率分量; 而衰减掉低于该频带及高于该频带的频率分量的滤波器, 如图 5.14 所示, 通频带  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , 其中  $\omega_1$  为**下截止频率**,  $\omega_2$  为**上截止频率**。

而**带阻滤波器**则刚好与带通滤波器相反, 阻止某一频带范围内的频率分量通过; 而允许其他低于该频带及高于该频带的频率分量通过的滤波器, 如图 5.15 所示。

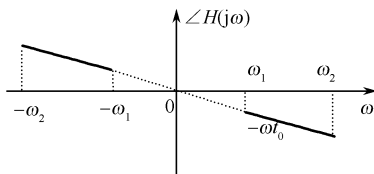
像无失真传输系统那样(幅频特性是一个常数)的系统为**全通系统**。

细心的读者会注意到, 从图 5.12 到图 5.15, 每一种理想滤波器的频率响应特性都是关于  $\omega = 0$  对称的, 因此看起来, 高通和带通都好像有两个通带! 实际我们在第 3 章中学习到, 现实世界中并不存在负频率分量, 只是为了便于采用数学工具对信号的频率响应进行分析。我们在对信号进行傅里叶变换时, 采用复指数信号  $e^{j\omega t}$  对其进行分解, 由于,  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ ,  $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$ , 两个这样的复指数信号可组成在同一频率  $\omega$  的谐波信号  $(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2 = \cos(\omega t)$ , 因此, 同一频率处的正负频率分量相加, 才是实际中信号包含的真实频率成分。通常, 为了便于采用数学工具对系统的频率响应进行分析, 在定义理想滤波器时都采用图 5.12 到图 5.15 这种对称的频响特性。

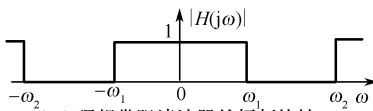


下截止频率 上截止频率

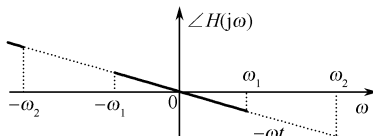
(a) 理想带通滤波器的幅频特性



(b) 理想带通滤波器的相频特性



(a) 理想带阻滤波器的幅频特性



(b) 理想带阻滤波器的相频特性

图 5.14 连续时间理想带通滤波器的频率响应

图 5.15 连续时间理想带阻滤波器的频率响应

### 5.3.2 理想滤波器的时域特性

从频域滤波的角度看,理想滤波器的频率特性是最佳的,然而它们是否具有同样的时域特性呢?这正是这一小节我们要讨论的问题。

对式(5.20)作傅里叶反变换,可得到理想低通滤波器的单位冲激响应  $h_{lp}(t)$  为

$$\begin{aligned} h_{lp}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[G_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_0}] = \mathcal{F}^{-1}[G_{2\omega_c}(\omega)] * \delta(t - t_0) \\ &= \left[ \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \right] * \delta(t - t_0) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)] = \frac{\sin\omega_c(t - t_0)}{\pi(t - t_0)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

式(5.21)的波形如图 5.16 所示。

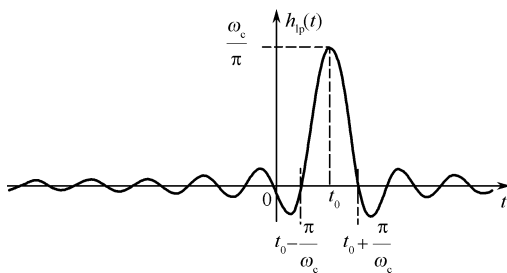


图 5.16 连续时间理想低通滤波器的单位冲激响应

尽管从频域滤波的角度看,理想滤波器的频率特性是最佳的,但它们的时域特性并不是最佳的。由图 5.16 可见单位冲激信号  $\delta(t)$  通过理想低通滤波器后得到的单位冲激响应  $h(t)$  出现了明显失真,出现了前后延伸至  $\pm\infty$  的振荡,这是由于理想低通滤波器对  $\delta(t)$  的频谱中高于频率  $\omega_c$  的频率分量进行抑制引起的频率截断效应。另外,单位冲激信号  $\delta(t)$  是在  $t=0$  时刻加入,而输出在该时刻以前( $t < 0$ )就有了,这是违背因果律的,显然理想低通滤波器在现实中是不存在的,或者说是物理不可实现的。

下面我们进一步讨论理想低通滤波器的频率截断效应对信号波形的影响。先看所表征的理想低通滤波器的单位阶跃响应。

$$\begin{aligned}
 s(t) &= h_{lp}(t) * u(t) \\
 &= \int_{-\infty}^t h_{lp}(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(\tau - t_0)}{\omega_c(\tau - t_0)} d\tau \stackrel{x = \omega_c(\tau - t_0)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t - t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t - t_0)} \frac{\sin x}{x} dx
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

式(5.22)的计算需要用正弦积分:

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \tag{5.23}$$

正弦积分的值在数学手册中有标准表格可查,其中,

$$\begin{cases} Si(-\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ Si(0) = 0 \\ Si(\infty) \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{5.24}$$

因此,式(5.22)最终为

$$s(t) = \frac{1}{\pi} [Si(0) - Si(-\infty)] + \frac{1}{\pi} Si[\omega_c(t - t_0)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\omega_c(t - t_0)] \tag{5.25}$$

式(5.25)的波形如图 5.17 所示。

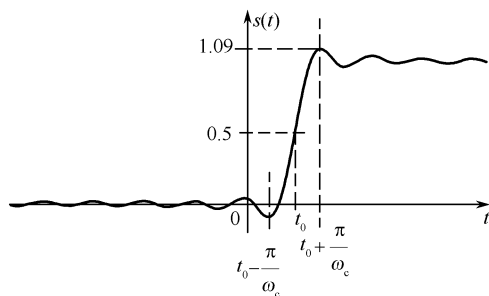


图 5.17 连续时间理想低通滤波器的单位阶跃响应

从图 5.17 可见  $s(t)$  的波形具有如下特点:

(1) 相对输入的单位阶跃信号已有明显失真,体现在上升沿不再陡峭,在上升之前就预先有起自  $t = -\infty$  的振荡(这又一次证明了理想低通滤波器的不可实现性),上升之后又有延续至  $t = \infty$  的振荡,振荡频率等于理想低通滤波器截止频率  $\omega_c$ 。这种振荡现象称为吉布斯现象,振荡波形称为吉布斯波纹。

吉布斯现象是由于截止频率  $\omega_c$  有限而带来的频率截断效应引起的,若  $\omega_c \rightarrow \infty$ ,理想低通滤波器将成为一无失真传输系统,吉布斯现象将不会存在。

(2) 吉布斯波纹的振荡频率等于理想低通滤波器的截止频率,即振荡周期为  $2\pi/\omega_c$ 。

(3) 在上升沿之前有一个幅度最大的负向振峰(预冲),其幅度约为稳态值的 9%;在上升之后又有一个幅度最大的正向振峰(过冲),比稳态值高出也是约 9%。而且无论  $\omega_c$  多大,只要



$\omega_c < \infty$ , 过冲和预冲的幅度总是这么大, 只有当  $\omega_c = \infty$  时, 它们的幅度才为零。

(4) 若定义  $s(t)$  的上升沿为从预冲的最大值到过冲的最大值所需时间为  $T_r$ , 则

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (5.26)$$

从式(5.26)容易看出,  $T_r$  与  $\omega_c$  成反比, 即  $\omega_c$  越小,  $T_r$  越大, 上升越慢;  $\omega_c$  越大,  $T_r$  越小, 上升越快, 这表明理想滤波器的时域特性与频域特性并不兼容。

理想带通滤波器(其频响特性见前面图 5.14)的通频带是一个带状区域, 只允许位于该区域内的频率成分通过, 其他频率成分受到抑制, 其频率响应为

$$H_{bp}(j\omega) = [G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)]e^{-j\omega t_0} \quad (5.27)$$

式(5.27)中  $t_0 > 0$ 。对式(5.27)作傅里叶反变换, 可得到理想带通滤波器的时域冲激响应为

$$\begin{aligned} h_{bp}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H_{bp}(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\{[G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)]e^{-j\omega t_0}\} \\ &= \left[ \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) e^{-j\omega_0 t} + \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) e^{-j\omega_0 t} \right] * \delta(t - t_0) \\ &= 2 \frac{\sin \omega_c(t - t_0)}{\pi(t - t_0)} \cos[\omega_0(t - t_0)] \end{aligned} \quad (5.28)$$

从式(5.28)可见, 理想带通滤波器是一个等效低通滤波器的单位冲激响应为包络的正弦载波幅度调制信号。

理想高通滤波器(其频响特性见前面图 5.13)与低通滤波器相反; 而理想带阻滤波器(其频响特性见前面图 5.15)与带通滤波器相反, 它们都可以用低通滤波器通过某种转换得到, 在此我们不再特别讨论。这也表明前面对理想低通滤波器的分析具有典型意义: 只要是理想滤波器都存在频率截断效应, 均是物理不可实现。然而, 理想滤波器在通信、图像处理、信号获取等工程应用中, 对于描述理想化的系统构成是很有用的。另外, 作为一种有用的抽象, 理想滤波器对理论分析也非常有用。

### 5.3.3 实际低通滤波器特性

对实际物理可实现的模拟滤波器来说, 其单位冲激响应  $h(t)$  必须满足因果条件

$$h(t) = 0, t < 0 \quad (5.29)$$

式(5.29)的条件转换到频域, 就是著名的佩利 — 维纳准则(Paley-Wiener criterion):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (5.30)$$

式(5.30)给出了滤波器物理可实现的充分必要条件。注意, 假如在任何有限频带上  $|H(j\omega)| = 0$ , 那么在该频带上  $|\ln |H(j\omega)|| = \infty$ , 不满足式(5.30)条件。但是, 如果仅仅在单个频点(或是一系列离散的频率点上)  $|H(j\omega)| = 0$ , 式(5.30)的积分方程仍然可能满足小于无穷的条件。也就是说, 物理可实现系统的频响  $H(j\omega)$  可以在某些离散的频率点上等于零, 但是不能在任何有限频带内等于零。显然, 前面图 5.12 到图 5.15 理想滤波器的频响特性都不满足式(5.30)准则的条件, 都是非因果的, 即物理不可实现。

当滤波必须实时完成时, 需要对理想滤波器的特性进行一个因果的近似。这种近似有两种实现的方法:

从时域的角度来说,为了实现图 5.16 的低通滤波器,可以采取截去其单位冲激响应  $h(t)$  零时以前时域响应的方法(见图 5.18):

$$\hat{h}(t) = h_{lp}(t)u(t) \quad (5.31)$$

显然,式(5.31)的响应是因果的,因此物理可实现。假如  $t_0$  足够大,  $\hat{h}(t)$  非常近似  $h_{lp}(t)$ , 式(5.31)的频响特性应该比较接近理想低通滤波器的频响特性,即可以用增大延迟时间  $t_0$  来换取系统的物理可实现程度。当  $t_0 \rightarrow \infty$ ,  $\hat{h}(t)$  等于理想低通滤波器  $h_{lp}(t)$ 。这实际与非因果系统的实现条件是一样的。通常来说,  $t_0$  不能无限大,最多  $t_0$  取 3 倍或 4 倍的  $\pi/\omega_c$ 。例如,对于音频录制时的滤波系统,通常要求处理的频带上限是 20kHz ( $\omega_c = 4000\pi$ ), 那么延迟  $t_0 = 10^{-4}$  (0.1ms) 是一个不错的选择。

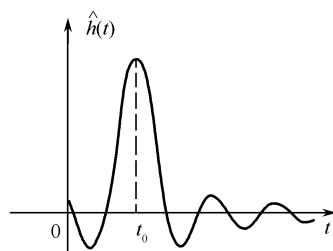


图 5.18 截断单位冲激响应  
零时以前的时域响应来  
近似实现理想低通滤波器

另外,从频域的角度来说,为了实现理想低通滤波器,可以用一个满足在任何有限频带内都不等于零的幅频响应来逼近图 5.12 所示低通滤波器的幅频响应,见图 5.19。

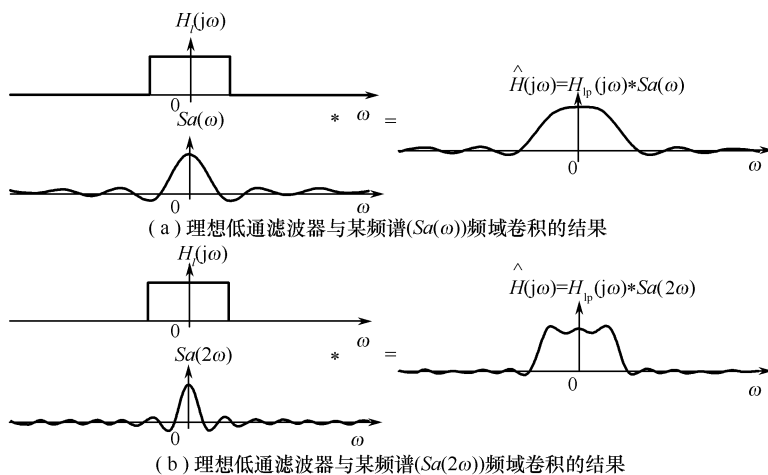


图 5.19 用一个满足在任何有限频带内都不等于零的幅频响应来近似低通滤波器的幅频响应

由于具有  $Sa(\cdot)$  形式的频谱满足式(5.30)的条件,其频响在任何有限频带内幅度都不等于零,因此,图 5.19 的两个滤波器作为理想低通滤波器与其卷积的结果也满足式(5.30)的条件,从而物理可实现。从图 5.19 可见,物理可实现滤波器的频率特性从通带到阻带是逐渐过渡的,即过渡带不为零。

实际中的许多滤波问题不一定要求有理想滤波器过渡带等于零的频率特性,例如,要进行分离的信号可能像图 5.20 中那样,并不总是位于可以完全分开的频段,而是在某些频段上频谱稍微有些重叠的。在这样一种情况下,或许更需要在两个信号的保真度上作一些权衡,比如说滤波器保留  $x_1(t)$ ,而对  $x_2(t)$  中的频率分量给予衰减。也就是说,当过滤像图 5.20 这类具有重叠频谱的混合信号时,宁肯希望滤波器的特性是具有一个从通带到阻带具有逐渐过渡特性的滤波器。

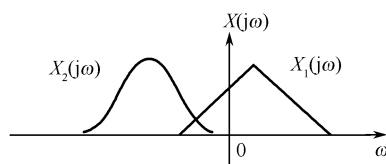


图 5.20 稍微有些重叠的两个频谱

实际中还有一个因素是必须考虑的,那就是实现滤波器的难易程度问题。一般来讲,对一个理想滤波器的特性逼近程度越好,无论该滤波器是由什么基本元器件构成的,其复杂程度和付出的代价也会越高。在很多场合下,并不需要一个具有最好的、精密特性的滤波器,只要满足滤波的技术指标要求,往往一个简单滤波器就够了。

基于上述原因,非理想滤波器的设计具有非常大的实际意义。

首先,由于理想滤波器的频率特性是不能物理实现,或者说不需要实现的,这就允许在滤波器的通带和阻带特性上有某些灵活性;以图 5.21 低通滤波器为例,该滤波器通带内的增益允许在单位增益基础上有  $\pm\delta_1$  的偏移,通常也称偏移量  $\pm\delta_1$  为**通带起伏**(或**通带波纹**);阻带内的增益允许在零增益的基础上有  $\delta_2$  的偏移,称偏移量  $\delta_2$  为**阻带起伏**(或**阻带波纹**)。

其次,相对于理想滤波器陡峭的过渡带来说,允许在通带和阻带之间有一个渐渐的过渡特性。以图 5.21 低通滤波器为例,通带边缘  $\omega_p$  和阻带边缘  $\omega_s$  之间允许存在一个  $\omega_s - \omega_p > 0$  的过渡带。

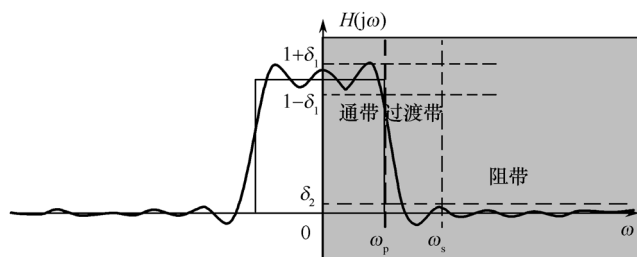


图 5.21 非理想滤波器的频率特性

从图 5.21 可见,非理想滤波器的频域特性都是在理想滤波器的基础上用几个参数来标定的。例如,  $\pm\delta_1$ 、 $\delta_2$  和过渡带的宽度  $\omega_s - \omega_p$  可分别用来衡量:在通带内这个滤波器对所通过的频率分量间幅度和相位的关系保持效果究竟如何?在阻带内这个滤波器对需要衰减的频率分量到底衰减到了什么程度?在靠近截止频率附近的过渡带有多陡峭?可见理想滤波器对于定义和评价一个实际非理想滤波器特性的重要性。

## 5.4 系统函数极零点对滤波器特性的影响

### 5.4.1 系统函数的极零点与系统频率响应的关系

在线性系统分析中,系统函数  $H(s)$  的零、极点是重要概念。根据系统函数  $H(s)$  在  $s$  平面零、极点的分布可以绘制系统频响特性曲线,包括幅频特性  $|H(j\omega)|$  曲线和相频特性

$\angle H(j\omega)$  曲线,下面将介绍这种方法的原理。

首先,考虑系统函数  $H(s)$  只有一个单个零点的情况:

$$H(s) = s - z_1 \quad (5.32)$$

对于某一给定的  $s$ ,例如在  $s = s_1$  处求值,式(5.32)的代数表达式为

$$H(s_1) = s_1 - z_1 \quad (5.33)$$

式(5.33)实际上是两个复数的差,一个是  $s_1$ ,另一个是  $z_1$ ,它们每一个都能在复平面内用一个向量来表示,如图 5.22 所示。代表复数  $s_1 - z_1$  的向量就是从  $s = z_1$  这个零点到  $s = s_1$  这个求值点的向量,这样  $H(s_1)$  的模等于该向量的长度,而  $H(s_1)$  的相位等于该向量相对实轴的角度。

如果系统函数  $H(s)$  在  $s = p_1$  处只有一个单个极点,即

$$H(s) = \frac{1}{s - p_1} \quad (5.34)$$

在给定的  $s = s_1$  处对  $H(s)$  求值,则  $H(s_1)$  的模就是差向量  $s_1 - p_1$  长度的倒数,而  $H(s_1)$  的相位就是向量  $s_1 - p_1$  对于实轴角度的负值,如图 5.23 所示。

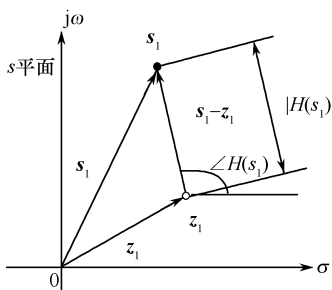


图 5.22 复数  $s_1 - z_1$  的向量表示

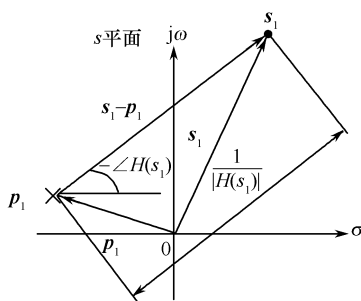


图 5.23 复数  $s_1 - p_1$  的向量表示

更一般的情况就是系统函数  $H(s)$  由上述讨论的极点和零点的乘积组成,也就是说,若系统函数可因式分解为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{j=1}^M (s - z_j)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)} \quad (5.35)$$

通过前面第 4 章的分析我们知道,当系统函数  $H(s)$  的收敛域包含虚轴时,  $H(j\omega)$  存在,并且  $H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$ 。为了得到系统频响  $H(j\omega)$  的几何求值,取  $s = j\omega$ ,也即在  $s$  平面上  $s$  沿虚轴移动,可由式(5.35)得到

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = K \frac{\prod_{j=1}^M (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^N (j\omega - p_i)} \quad (5.36)$$

式(5.36)表示除了一个常数因子外,可以用系统的零极点来完全表征系统,即系统的频率特性完全取决于零极点的分布,或者说,取决于零极点  $z_j, p_i$  在  $s$  平面上的位置。

分母中任意一个因子  $(j\omega - p_i)$ , 相当于由极点  $p_i$  引向虚轴上某  $j\omega$  点的向量, 定义为**极点向量**, 令  $j\omega - p_i = A_i e^{j\theta_i}$ , 则  $A_i$  和  $\theta_i$  分别是极点向量  $(j\omega - p_i)$  的长度  $|j\omega - p_i|$  和幅角  $\angle(j\omega - p_i)$ ; 分子中任意一个因子  $(j\omega - z_j)$ , 相当于由零点  $z_j$  引向虚轴上某  $j\omega$  点的向量, 定义为**零点向量**, 令  $j\omega - z_j = B_j e^{j\psi_j}$ , 则  $B_j$  和  $\psi_j$  分别是零点向量  $(j\omega - z_j)$  的长度  $|j\omega - z_j|$  和幅角  $\angle(j\omega - z_j)$ , 如图 5.24 所示。

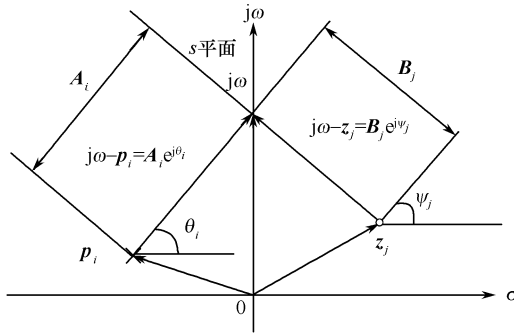


图 5.24 系统函数的极点向量和零点向量

从所有零点向  $j\omega$  点作零点向量, 从所有极点向  $j\omega$  点作极点向量。于是, 式(5.36)可以写为

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^M B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^N A_i e^{j\theta_i}} = K \frac{B_1 B_2 \cdots B_M e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_M)}}{A_1 A_2 \cdots A_N e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)}} = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \quad (5.37)$$

从式(5.37)可得到系统幅频特性为

$$|H(j\omega)| = K \frac{B_1 B_2 \cdots B_M}{A_1 A_2 \cdots A_N} \quad (5.38)$$

系统相频特性为

$$\angle H(j\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N) \quad (5.39)$$

由于  $A_i = |j\omega - p_i|$ ,  $\theta_i = \angle(j\omega - p_i)$ ,  $B_j = |j\omega - z_j|$ ,  $\psi_j = \angle(j\omega - z_j)$ , 式(5.38)、(5.39)又可表示为

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{\prod_{j=1}^M |j\omega - z_j|}{\prod_{i=1}^N |j\omega - p_i|} \quad (5.40)$$

$$\angle H(j\omega) = \sum_{j=1}^M \angle(j\omega - z_j) - \sum_{i=1}^N \angle(j\omega - p_i) \quad (5.41)$$

式(5.40)表示: 所有零点向量的长度之积乘以  $|K|$ , 再除以所有极点向量的长度之积等于

$|H(j\omega)|$ ; 式(5.41)表示所有零点向量幅角之和减去所有极点向量幅角之和等于  $\angle H(j\omega)$ 。当然如果  $K < 0$ , 则对应式(5.41)有一个附加的相移  $\pi$ 。

利用式(5.40)和式(5.41), 就可以由系统函数的极零点得到系统的幅频特性  $|H(j\omega)|$  和相频特性  $\angle |H(j\omega)|$ , 这种方法可用来设计系统, 下面举例说明。

**【例 5.4.1】** 画出系统函数的零极点图和系统的频率响应  $H(j\omega)$ 。

$$(1) H(s) = \frac{1}{s + a - j\omega_0}, \operatorname{Re}[s] > -a, (a > 0, \omega_0 \geq 0)$$

$$(2) H(s) = s + a - j\omega_0, (\omega_0 \geq 0)$$

解: (1) 系统函数的零极点图如图 5.25(a) 所示。

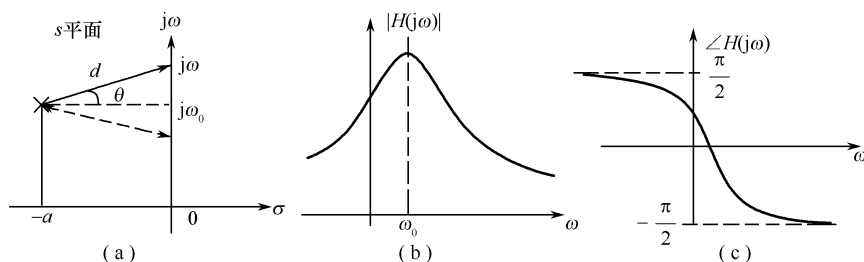


图 5.25 极点的位置与频率响应的关系

图 5.25(a) 上构造了极点向量  $(j\omega + a - j\omega_0)$ , 该向量从极点  $p_1 = -a + j\omega_0$  引出, 指向  $j\omega$  点。极点向量  $(j\omega + a - j\omega_0)$  长度  $d$  等于  $j\omega$  点频响的幅度倒数:

$$d = |j\omega + a - j\omega_0| = \sqrt{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \frac{1}{|H(j\omega)|}$$

从图 5.25(a) 可见, 当  $\omega$  在  $(-\infty, \infty)$  之间变化时, 极点向量的长度  $d$  在  $\omega = \omega_0$  时会出现一个极小值, 该极小值等于极点到  $s$  平面虚轴的距离  $a$ 。由于  $j\omega$  点频响的幅度等于极点向量长度  $d$  的倒数, 即表示系统的幅频响应会在  $\omega = \omega_0$  时出现一个极大值, 该极大值等于  $1/a$ , 见图 5.25(b)。另外, 从图 5.25(a) 可见, 当  $\omega \rightarrow \infty$  时, 极点向量  $(j\omega + a - j\omega_0)$  的幅角  $\theta$  将趋于  $\pi/2$ ; 当  $\omega \rightarrow -\infty$  时, 极点向量的幅角  $\theta$  将趋于  $-\pi/2$ 。由于  $j\omega$  点频响的相位等于极点向量幅角  $\theta$  的负数, 则  $\omega \rightarrow -\infty$  时,  $\angle H(j\omega) \rightarrow \pi/2$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $\angle H(j\omega) \rightarrow -\pi/2$ , 见图 5.25(c)。

(2) 系统函数的零极点图如图 5.26(a) 所示。

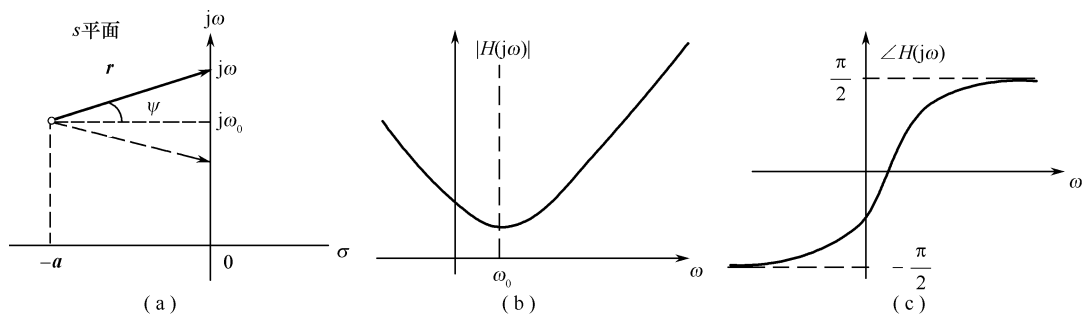


图 5.26 零点的位置与频率响应的关系

图 5.26(a) 上构造了零点向量  $(j\omega + a - j\omega_0)$ , 该向量从零点  $z_1 = -a + j\omega_0$  引出, 指向  $j\omega$  点。

零点向量( $j\omega + a - j\omega_0$ )长度 $r$ 等于 $j\omega$ 点频响的幅度:

$$r = |j\omega + a - j\omega_0| = \sqrt{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} = |H(j\omega)|$$

从图 5.26(a) 可见,当 $\omega$ 在 $(-\infty, \infty)$ 之间变化时,零点向量的长度 $r$ 在 $\omega = \omega_0$ 时会出现一个极小值,该极小值等于极点到 $s$ 平面虚轴的距离 $a$ 。由于 $j\omega$ 点频响的幅度等于零点向量长度 $r$ ,即表示系统的幅频响应会在 $\omega = \omega_0$ 时出现一个极小值,该极小值等于 $a$ ,见图 5.26(b)。另外,从图 5.26(a) 可见,当 $\omega \rightarrow \infty$ 时,零点向量( $j\omega + a - j\omega_0$ )的幅角 $\psi$ 将趋于 $\pi/2$ ;当 $\omega \rightarrow -\infty$ 时,零点向量的幅角 $\psi$ 将趋于 $-\pi/2$ 。由于 $j\omega$ 点频响的相位等于零点向量幅角 $\psi$ ,则 $\omega \rightarrow -\infty$ 时, $\angle H(j\omega) \rightarrow -\pi/2$ , $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\angle H(j\omega) \rightarrow \pi/2$ ,见图 5.26(c)。

从图 5.25 可见,从 $(-\infty, \omega_0)$ ,系统幅频响应 $|H(j\omega)|$ 逐渐增强,在 $\omega = \omega_0$ 时出现极大值,随后从 $(\omega_0, \infty)$ 幅频响应 $|H(j\omega)|$ 逐渐减弱,幅频响应极值位置与极点 $p_1 = -a + j\omega_0$ 有关。即系统函数的极点 $p_1 = -a + j\omega_0$ 会导致系统幅频响应 $|H(j\omega)|$ 在极点的虚部 $\omega_0$ 处出现较强的频率选择性。如果极点 $p_1 = -a + j\omega_0$ 越靠近虚轴( $a$ 越小),则系统的幅频响应 $|H(j\omega)|$ 的频率选择性也越强( $\omega = \omega_0$ 处 $|H(j\omega)|$ 的极大值 $1/a$ 越大)。换句话说,如果希望系统的幅频响应 $|H(j\omega)|$ 在 $\omega_0$ 处出现较高的增益,就需要在 $j\omega_0$ 在附近放置一个极点。由于因果稳定系统的极点都在 $s$ 平面的左半平面,所以,从系统稳定的角度来看, $j\omega_0$ 附近放置的这个极点实部要小于零,例如极点 $p_1 = -a + j\omega_0$  ( $a > 0$ )。

从图 5.26 可见,从 $(-\infty, \omega_0)$ ,系统幅频响应 $|H(j\omega)|$ 逐渐衰减,在 $\omega = \omega_0$ 时出现极小值,随后从 $(\omega_0, \infty)$ 幅频响应 $|H(j\omega)|$ 逐渐增强,幅频响应极值位置与零点 $z_1 = -a + j\omega_0$ 有关。即系统函数的零点 $z_1 = -a + j\omega_0$ 会导致系统幅频响应 $|H(j\omega)|$ 在零点的虚部 $\omega_0$ 处出现较强的频率阻隔性。如果零点 $z_1 = -a + j\omega_0$ 越靠近虚轴( $a$ 越小),则系统的幅频响应 $|H(j\omega)|$ 的频率阻隔性也越强( $\omega = \omega_0$ 处 $|H(j\omega)|$ 的极小值 $a$ 越小)。换句话说,如果希望系统的幅频响应 $|H(j\omega)|$ 在 $\omega_0$ 处出现零增益,就需要在 $j\omega_0$ 处放置一个零点;如果仅希望 $|H(j\omega)|$ 在 $\omega_0$ 处出现较低的增益,则可在 $j\omega_0$ 附近放置的一个零点,例如零点 $z_1 = -a + j\omega_0$  ( $a > 0$ )或零点 $z_2 = a + j\omega_0$  ( $a > 0$ )。

由于系统的零极点图可以直观、方便地表征、研究和设计系统,因此该方法也被称为 $s$ 平面的几何分析。接下来,我们来考虑在系统函数具有一级极点及一阶零点时,利用零极点图对其频率响应几何求值的例子。

**【例 5.4.2】** 画出系统函数的零、极点图和系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。

$$(1) H(s) = \frac{s-a}{s+a}, a > 0, \operatorname{Re}[s] > -a;$$

$$(2) H(s) = \frac{s}{s+a}, a > 0, \operatorname{Re}[s] > -a.$$

**解:** (1) 系统函数的零、极点图如图 5.27(a) 所示。

由图 5.27(a) 可明显看出,沿 $j\omega$ 轴的任一点,其极点向量( $j\omega + a$ )与零点向量( $j\omega - a$ )的长度都是相等的,因此,该系统的幅频特性是一个与频率无关的常数,这样的系统称为全通系统,因为它等增益(或等衰减)地通过所有频率分量,如图 5.27(b) 所示。另外,从图 5.27(a) 可见,由于系统相频特性是零点向量( $j\omega - a$ )的幅角 $\psi$ 减去极点向量( $j\omega + a$ )的幅角 $\theta$ ,即 $\angle H(j\omega) = \psi - \theta$ ,当 $\omega \rightarrow \pm\infty$ 时, $\psi \rightarrow \theta$ ,所以 $\angle H(j\omega) \rightarrow 0$ ;而当 $\omega \rightarrow 0+$ 时, $\psi \rightarrow \pi, \theta \rightarrow 0$ ,

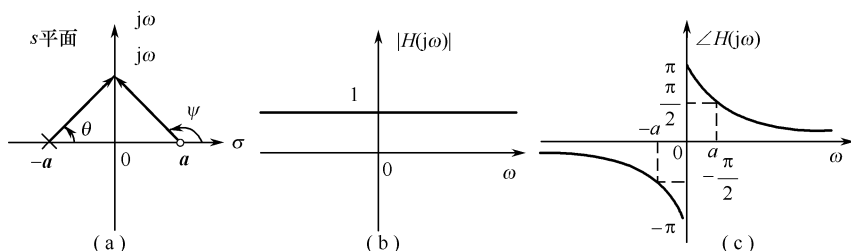


图 5.27 对称零、极点与频率响应

$\angle H(j\omega) \rightarrow \pi$ ; 当  $\omega \rightarrow 0$  时,  $\psi \rightarrow -\pi, \theta \rightarrow 0, \angle H(j\omega) \rightarrow -\pi$ , 如图 5.27(c) 所示。

(2) 系统函数的零、极点图如图 5.28(a) 所示。

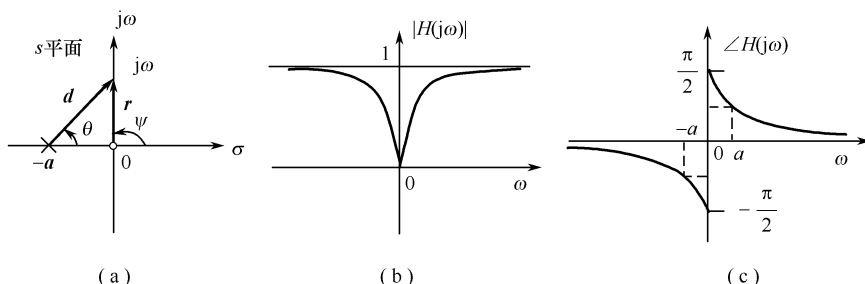


图 5.28 零、极点与频率响应

图 5.28(a) 上构造了零点向量( $j\omega$ ), 其长度为  $r$ ; 构造了极点向量( $j\omega + a$ ), 其长度为  $d$ 。由图 5.28(a) 可明显看出: 当  $\omega = 0$  时,  $d = a, r = 0$ , 由于  $|H(j\omega)| = r/d$ , 则  $|H(j0)| = 0$ ; 当  $\omega \rightarrow \pm\infty$  时,  $d \rightarrow r$ , 则  $\omega \rightarrow \pm\infty$  时,  $|H(\pm j\infty)| \rightarrow 1$ ; 而  $\omega \in (0, \infty)$  或  $\omega \in (-\infty, 0)$  时,  $r$  小于  $d$ , 即  $|H(j\omega)| < 1$ , 可知系统幅频响应具有高通特性, 如图 5.28(b) 所示。另外, 由于系统相频特性是零点向量( $j\omega$ ) 的幅角  $\psi$  减去极点向量( $j\omega + a$ ) 的幅角  $\theta$ , 即  $\angle H(j\omega) = \psi - \theta$ , 当  $\omega > 0$ , 零点向量( $j\omega$ ) 幅角  $\psi = \pi/2$ , 极点向量( $j\omega + a$ ) 幅角  $\theta$  变化范围为  $(0, \pi/2)$ , 所以  $\angle H(j\omega) \in (\pi/2, 0)$ ; 当  $\omega < 0$ , 零点向量( $j\omega$ ) 幅角  $\psi = -\pi/2$ , 极点向量( $j\omega + a$ ) 幅角  $\theta$  变化范围为  $(-\pi/2, 0)$ , 所以  $\angle H(j\omega) \in (0, -\pi/2)$ , 如图 5.28(c) 所示。

从图 5.27 和图 5.28 可见, 如果零点与极点虚部位置相同(或相近), 例如系统函数极点为  $p_1 = -a_1 + j\omega_0$  ( $a_1 > 0$ ), 零点为  $z_1 = a_2 + j\omega_0$ , 则零点  $z_1 = a_2 + j\omega_0$  将抵消极点  $p_1 = -a_1 + j\omega_0$  在  $\omega = \omega_0$  时对幅频响应的极大值贡献, 特别是若零点的实部等于零(零点在  $j\omega$  轴上), 这种抵消作用最彻底: 将在  $\omega = \omega_0$  处直接引入幅频响应的零点。

可见, 在线性系统中, 系统函数  $H(s)$  的零、极点是重要概念。而  $s$  平面几何分析的重要性就在于, 可以根据系统函数  $H(s)$  在  $s$  平面零、极点的分布, 近似观察和描述线性时不变系统频率响应的整体特性。

一般情况下, 系统函数为有理函数, 其极、零点共轭成对出现, 频率响应也具有共轭对称性(幅频响应偶对称, 相频响应奇对称), 在对其进行  $s$  平面几何分析时, 通常只要考虑  $\omega \geq 0$  的情况就可以了。

**【例 5.4.3】** 试通过下列系统函数的零极点图判断系统的滤波特性。

$$(1) H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad (\omega_c > 0)$$



$$(2) H(s) = \frac{1}{(s + \omega_c + j\omega_0)(s + \omega_c - j\omega_0)}, (\omega_0 > \omega_c > 0)$$

$$(3) H(s) = \frac{(s - j\omega_c)(s + j\omega_c)}{(s + \omega_c \cos\theta + j\omega_c \sin\theta)(s + \omega_c \cos\theta - j\omega_c \sin\theta)}, (\omega_c > 0)$$

解: 系统函数(1)的极点为  $p_1 = -\omega_c$ , 如图 5.29(a) 所示。系统函数(2)的极点为  $p_{1,2} = -\omega_c \pm j\omega_0$ , 如图 5.29(b) 所示。系统函数(3)的极点为  $p_{1,2} = -\omega_c \cos\theta \pm j\omega_c \sin\theta$ , 零点为  $z_{1,2} = \pm j\omega_c$ , 如图 5.29(c) 所示。

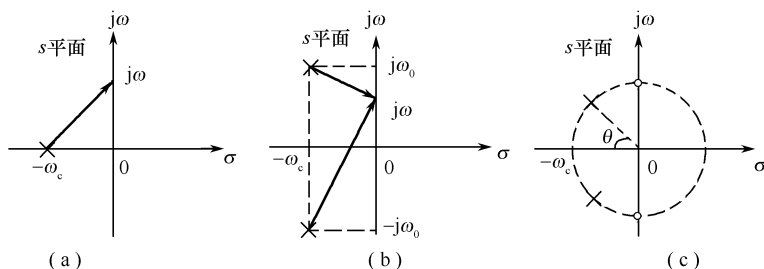


图 5.29 系统极、零点图

从图 5.29(a) 可知, 从其极点  $p_1 = -\omega_c$  指向  $j\omega$  的极点向量长度在  $\omega = 0$  时最短, 当  $\omega > 0$  时随  $\omega$  的递增而增加, 即系统的幅频特性在  $\omega > 0$  时随  $\omega$  的递增而递减, 在  $\omega = 0$  取到极大值, 可见该系统具有低通滤波器特性, 如图 5.30(a) 所示。从图 5.29(b) 可知, 从其极点  $p_{1,2} = -\omega_c \pm j\omega_0$  指向  $j\omega$  的两个极点向量分别在  $\omega = \pm\omega_0$  时最短, 即系统的幅频特性在  $\omega = \pm\omega_0$  取到极大值, 可见该系统具有带通滤波器特性, 如图 5.30(b) 所示。从图 5.29(c) 可知, 从其极点  $p_{1,2} = -\omega_c \cos\theta \pm j\omega_c \sin\theta$  指向  $j\omega$  的两个极点向量分别在  $\omega = \pm\omega_c \sin\theta$  时最短, 它们将使得系统的幅频特性在  $\omega = \pm\omega_c \sin\theta$  时取极大值, 但是, 由于从其零点  $z_{1,2} = \pm j\omega_c$  指向  $j\omega$  的两个零点使得系统幅频特性在  $\omega = \pm\omega_c$  取零值, 从而抵消了极点在  $\omega = \pm\omega_c \sin\theta$  引起的极大值特性, 由于系统的幅频特性在别处没有极值, 可知该系统具有带阻滤波器特性, 如图 5.30(c) 所示。

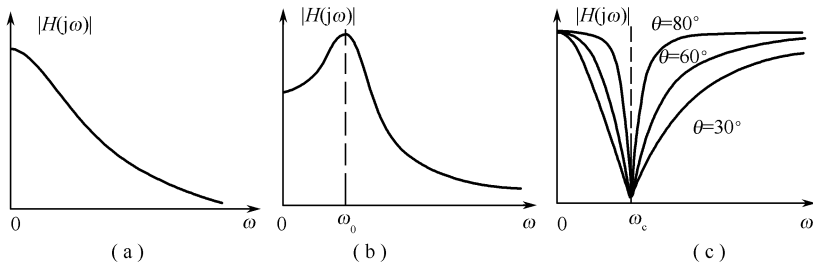


图 5.30 系统幅频特性

工程中常用  $s$  平面的几何分析方法来设计模拟滤波器, 其理论和设计方法已相当成熟。常用的低通模拟滤波器包括巴塞尔滤波器、巴特沃斯 (Butterworth) 滤波器、切比雪夫 (Chebyshev) 滤波器、椭圆滤波器等。各类模拟滤波器可通过这些低通模拟原型滤波器变换获得。另外, 数字滤波器的设计通常也采用先设计一个符合技术指标要求的归一化模拟原型滤波器, 然后再按照一定准则将其从  $s$  平面映射到  $z$  平面 (见本书第 11 章), 从而完成数字滤波器的设计过程。为了使得大家对这些经典低通滤波器有所了解, 接下来我们对其中的巴特沃斯滤波器和切比雪夫滤波器进行介绍, 并从系统函数极零点的角度来分析其滤波特性。

### 5.4.2 巴特沃斯(Butterworth)滤波器

5.4.1节中例5.4.3(1)的系统函数  $H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$  实际具有低通滤波器特性[见前面图5.30(a)],但是与理想低通滤波器相比,其幅频特性显然差别较大(如图5.31所示)。

如果期望从幅频特性出发设计一个物理可实现的非理想低通滤波器,该滤波器的截止频率为  $\omega_c$ ,当  $\omega > \omega_c$ ,期望系统频率响应的增益能迅速衰减至0,而在  $[0, \omega_c]$  的通带内,系统频率响应逼近理想低通滤波器的常数增益,根据前面  $s$  平面的几何分析方法,需要在  $s$  平面  $(0, j\omega_c)$  内布置一个“极点墙”,如图5.32所示。当然,实际中组成“极点墙”的极点个数不可能无限。通过选择合适的极点数目,并且按照一定规律来选择极点的分布,可以设计实现非理想低通滤波器。Butterworth 低通滤波器就是基于此思想设计出来的。

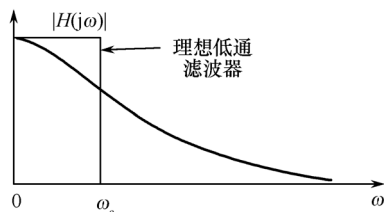


图 5.31 具有单个极点的低通滤波器幅频响应

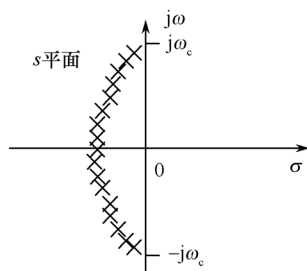


图 5.32 低通滤波器的“极点墙”

通常 Butterworth 滤波器的特性由频率响应的幅度平方函数给出。对  $N$  阶 Butterworth 低通滤波器有

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (\omega/\omega_c)^{2N}} \quad (5.42)$$

式(5.42)中  $N$  为滤波器的阶数,当  $\epsilon = 1$  时,称归一化 Butterworth 滤波器,  $\omega_c$  为通带截止频率,或称**3dB 带宽**,因为对归一化 Butterworth 滤波器来说,当  $\omega = \omega_c$  时,

$$|B(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, 20\log_{10} \left| \frac{B(j0)}{B(j\omega_c)} \right| = 3\text{dB} \quad (5.43)$$

注意到  $B(s) \Big|_{s=j\omega} = B(j\omega)$ ,将  $|B(j\omega)|^2$  函数拓展到整个  $s$  平面有

$$B(s)B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2N}} \quad (5.44)$$

从式(5.44)看 Butterworth 滤波器全部零点都在  $s = \infty$ ,即没有有限零点,故又称为“全极点逼近型”。

令式(5.44)分母等于零,可以得到

$$(p_k/j\omega_c)^{2N} = -1 = e^{j\pi(2k-1)}, k \in Z \quad (5.45)$$

故 Butterworth 滤波器的极点为

$$p_k = \omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k-1+N)}, k = 1, 2, 3, \dots, 2N \quad (5.46)$$

观察式(5.46)可知,Butterworth 滤波器的所有极点均分布在  $s$  平面的以  $\omega_c$  为半径的圆上,间隔角度为  $\pi/N$ ,如图5.33所示。这些极点关于虚轴对称分布,并且没有一个落在虚轴上,

当  $N$  为奇数时,有一个极点在实轴上,当  $N$  为偶数时,没有极点落在实轴上。

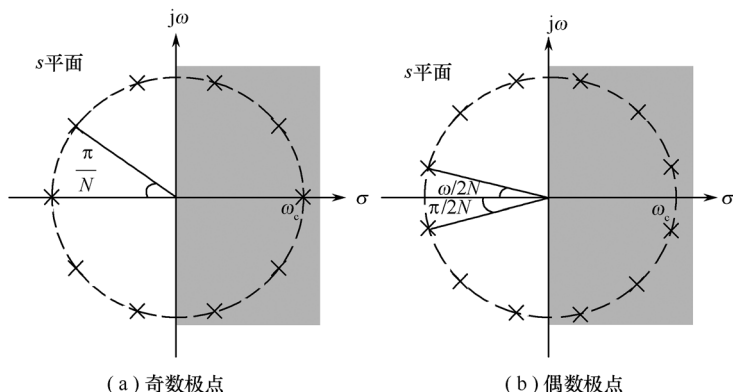


图 5.33 Butterworth 滤波器的极点分布

从因果、稳定性考虑,  $s$  平面左半平面的极点应该是 Butterworth 滤波器系统函数  $B(s)$  的, 而  $s$  平面右半平面的极点应该是  $B(-s)$  的, 即式(5.46)中对应  $B(s)$  的极点为

$$p_k = \omega_c \left[ \cos \frac{\pi}{2N} (2k + N - 1) + j \sin \frac{\pi}{2N} (2k + N - 1) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.47)$$

即 Butterworth 滤波器系统函数  $B(s)$  为

$$B(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (5.48)$$

如果要归一化最大幅频响应, 则 Butterworth 滤波器系统函数  $B(s)$  为

$$B(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (5.49)$$

在 MATLAB 中调用函数  $[z, p, k] = \text{butter}(N)$ , 可以设计一个  $N$  阶标准 Butterworth 滤波器 ( $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ ), 其中  $z$  为零点矩阵,  $p$  为极点矩阵,  $k$  为增益, 由于  $N$  阶标准 Butterworth 滤波器

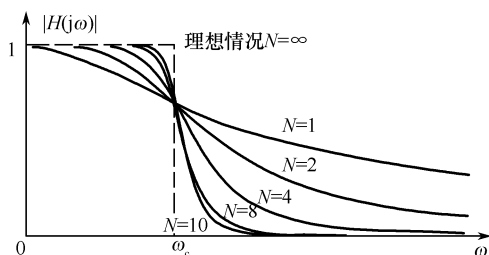
$B_0(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}$ , 而对于  $N$  阶非标准 Butterworth 滤波器来说  $B(s) = B_0(s/\omega_c)$ ,

$$\text{故 } B(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - p_k \omega_c)}.$$

当系统函数极点数目  $N$  不同时, Butterworth 滤波器的幅频特性是不同的, 如图 5.34 所示。

从图 5.34 可见 Butterworth 滤波器具有以下特性: (1) 在通带内有最平坦的幅频特性; (2) 阻带内幅频特性随频率升高单调下降; (3) 滤波器特性完全由极点数目  $N$  决定,  $N$  越大, 过渡带越窄, 越接近理想特性。因此, 通常也将  $N$  称为 Butterworth 滤波器的阶数。

由于 Butterworth 滤波器的频率特性在通带和阻带内均单调变化, 显然, 如果要求指标比较高, 将造成滤波器阶数比较高。阶数  $N$  越高, Butterworth 滤波器对理想特性逼近得越好, 过渡带越窄, 但付出的代价是系统越复杂。

图 5.34 Butterworth 滤波器的幅频特性与极点数目  $N$  的关系

### 5.4.3 切比雪夫(Chebyshev)滤波器

类似 Butterworth 滤波器, Chebyshev 低通滤波器的设计思想也是像图 5.32 那样, 在  $s$  平面  $(0, j\omega_c)$  内用有限极点布置一个“极点墙”, 以期频率响应逼近理想低通滤波器。只不过,  $N$  阶 Butterworth 滤波器的  $N$  个极点均分布在  $s$  平面的以  $\omega_c$  为半径的圆上, 间隔角度为  $\pi/N$ , 而  $N$  阶 Chebyshev 低通滤波器的  $N$  个极点均分布在  $s$  平面的椭圆上。

Chebyshev 滤波器分两类, 一种是通带等起伏阻带单调, 称为 Chebyshev-I 型; 另一种是通带单调阻带等起伏, 称为 Chebyshev-II 型。Chebyshev 滤波器与 Butterworth 滤波器属于同一类滤波器, 都是从幅度平方函数确定系统函数。对  $N$  阶 Chebyshev-I 型低通滤波器有

$$|C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_c)} \quad (5.50)$$

式(5.50)中,

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}(x)), & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(\cosh^{-1}(x)), & 1 < x \leq \infty \end{cases}, x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (5.51)$$

从定义式(5.51)可知: 当  $N=0$ ,  $T_0(x)=1$ ; 当  $N=1$ ,  $T_1(x)=\cos(\cos^{-1}x)=x$ ; 当  $N=2$ ,  $T_2(x)=2xT_1(x)-T_0(x)$ , 以此类推  $T_{N+1}(x)=2xT_N(x)-T_{N-1}(x)$ 。其中  $N=0 \sim 7$  时的  $T_N(x)$  见表 5-1。

表 5-1 Chebyshev 的  $T_N(x)$ 

$N$	$T_N(x)$
0	1
1	$x$
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

从定义式(5.50)和式(5.51)还可得到  $N$  阶 Chebyshev-I 型低通滤波器几点特性:

$$(1) \text{ 从表 5-1 可知, } T_N(x) = \begin{cases} 0 & N - \text{奇数} \\ 1 & N - \text{偶数} \end{cases}$$

$$\text{因此, } |C(j0)| = \begin{cases} 1 & N - \text{奇数} \\ 1/\sqrt{1+\epsilon^2} & N - \text{偶数} \end{cases}$$

(2) 当  $0 < x < 1$ ,  $T_N^2(x)$  在 0 和 1 之间变化; 当  $x > 1$ ,  $T_N(x)$  像双曲余弦一样单调增加。因此, 当  $0 \leq \omega/\omega_c \leq 1$ ,  $|C(j\omega)|^2$  在 1 和  $1/(1+\epsilon^2)$  之间波动, 而当  $\omega/\omega_c > 1$  时,  $|C(j\omega)|^2$  单调减小。

注意到  $C(s) \Big|_{s=j\omega} = C(j\omega)$ , 将  $|C(j\omega)|^2$  函数

拓展到整个  $s$  平面有

$$C(s)C(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(s/j\omega_c)} \quad (5.52)$$

令式(5.52) 分母等于零,可以得到

$$\epsilon^2 T_N^2(p_k/j\omega_c) = -1 \quad (5.53)$$

令  $x = \frac{1}{N} \sinh^{-1} \left( \frac{1}{\epsilon} \right)$ , 考虑到因果、稳定性, Chebyshev-I 型滤波器的极点为

$$p_k = -\omega_c \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2N} \right] \sinh x + j\omega_c \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2N} \right] \cosh x, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.54)$$

令式(5.54) 中  $\omega_c \sinh x = a$ ,  $\omega_c \cosh x = b$ , 在图 5.35 中分别以  $a, b$  为半径作小圆和大圆, 按照  $\pi/N$  角度等间隔划分, 极点纵坐标由相应大圆上的点纵坐标表示, 极点横坐标由相应的小圆上的点横坐标表示, 则 Chebyshev-I 型滤波器的所有极点均分布在  $s$  平面的以  $a$  为短半轴,  $b$  为长半轴的椭圆上。这些极点没有一个落在虚轴上, 当  $N$  为奇数时, 有一个极点在实轴上, 当  $N$  为偶数时, 没有极点落在实轴上。

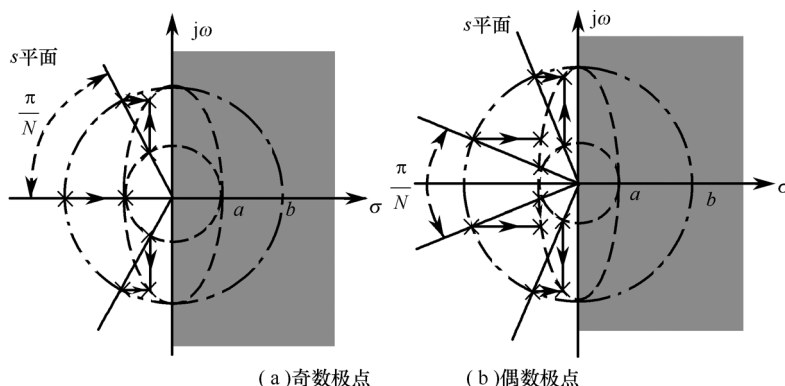


图 5.35 Chebyshev-I 型滤波器的极点分布

MATLAB中调用函数  $[z, p, k] = \text{cheblap}(N, R_p)$ , 可以设计一个  $N$  阶标准 Chebyshev-I 型滤波器 ( $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ ), 其中  $z$  为零点矩阵,  $p$  为极点矩阵,  $k$  为增益,  $R_p$  为通带最大波纹 (dB);

当系统函数极点数目  $N$  不同时, Chebyshev-I 型滤波器的幅频特性是不同的, 如图 5.36 所示。

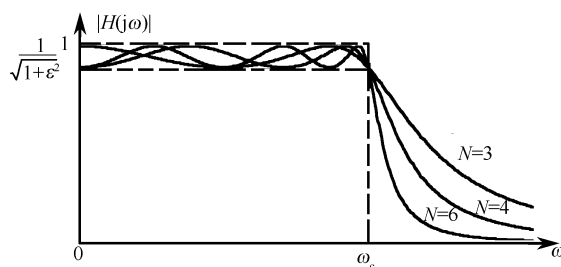


图 5.36 Chebyshev-I 型的幅频特性与极点数目  $N$  的关系

从图 5.36 可见 Chebyshev-I 型滤波器具有以下特性: (1) 在通带内幅频特性等起伏, 极值数目等于极点数目  $N$ ; (2) 阻带内幅频特性随频率升高单调下降; (3) 滤波器特性完全由极点数目  $N$  决定,  $N$  越大, 过渡带越窄, 越接近理想特性。

Chebyshev-Ⅱ型滤波器可以通过一种变换与 Chebyshev-Ⅰ型滤波器联系起来。具体来讲,就是将式(5.50)中的  $\epsilon^2 T_z^2(\omega/\omega_c)$  用倒数来替换,并且将其自变量  $\omega/\omega_c$  也用倒数来替换,即可得到  $N$  阶 Chebyshev-Ⅱ型低通滤波器:

$$|C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\epsilon^2 T_N^2(\omega_c/\omega)]^{-1}} \quad (5.55)$$

类似, MATLAB 中调用函数  $[z, p, k] = \text{cheb2ap}(N, A_s)$ , 可以设计一个  $N$  阶标准 Chebyshev-Ⅱ滤波器 ( $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ ), 其中  $z$  为零点矩阵,  $p$  为极点矩阵,  $k$  为增益,  $A_s$  为阻带最大衰减(dB)。也可先设计  $N$  阶标准 Chebyshev-Ⅰ滤波器, 然后再利用上述变换。

当系统函数极点数目  $N$  不同时, Chebyshev-Ⅱ型滤波器的幅频特性是不同的, 如图 5.37 所示。

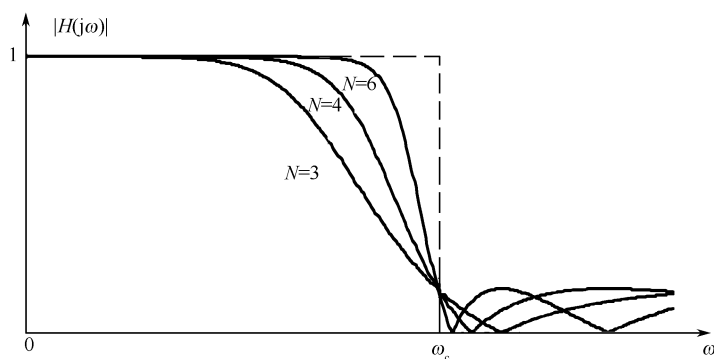


图 5.37 Chebyshev-Ⅱ型的幅频特性与极点数目  $N$  的关系

从图 5.37 可见 Chebyshev-Ⅱ型滤波器具有以下特性:(1) 在通带内幅频特性随频率升高单调下降;(2) 阻带内幅频特性随频率等起伏;(3) 滤波器特性完全由极点数目  $N$  决定,  $N$  越大, 过渡带越窄, 越接近理想特性。

无论 Chebyshev-Ⅰ 还是 Chebyshev-Ⅱ型滤波器, 其阶数  $N$  越高, 对理想特性逼近得越好, 过渡带越窄, 付出的代价是系统越复杂。但是在相同的设计指标要求下, 相比在阻带和通带内均单调变化的 Butterworth 滤波器来说, 由于 Chebyshev 滤波器具有或者在通带或者在阻带内等起伏的频率特性, 使得逼近误差或均匀分布在通带或者均匀分布在阻带内, 可以降低所要求的滤波器阶数。

## 习 题 五

5.1-1 已知因果线性时不变系统的系统函数为  $H(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+4}$ , 试求下列输入信号的输出响应  $y(t)$ 。

(1)  $x(t) = 5\cos(2t+30^\circ)$  (2)  $x(t) = 10\cos(2t+45^\circ)$  (3)  $x(t) = 10\cos(3t+40^\circ)$

5.1-2 已知因果线性时不变系统的系统函数为  $H(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2}$ , 当激励信号如下时, 试求稳态响应。

(1)  $x(t) = 10u(t)$

(2)  $x(t) = \cos(2t+60^\circ)u(t)$

$$(3) x(t) = \sin(3t - 45^\circ)u(t) \quad (4) x(t) = e^{j3t}u(t)$$

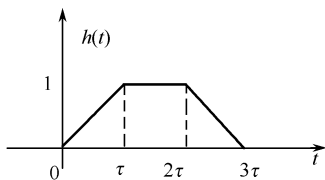
5.1-3 已知系统单位冲激响应如题 5.1-3 图所示,当输入  $x(t) = \sin \frac{\pi t}{2\tau} + \sin \frac{\pi t}{\tau}$ ,求输入响应。

5.1-4 考虑一频率响应为  $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$  和单位冲激响应为  $h(t)$  的连续时间 LTI 系统,假设在该系统上施加一个输入  $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ ,所得输出响应  $y(t) = Ax(t - t_0)$ 。这里  $A$  为非负的实数,代表幅度放大因子, $t_0$  代表延时。

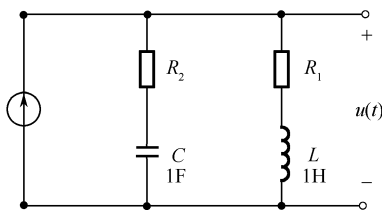
(1) 用  $|H(j\omega_0)|$  表示  $A$ ;

(2) 用  $\angle H(j\omega_0)$  表示  $t_0$ 。

5.2-1 写出如题 5.2-1 图所示电路的频率响应  $H(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)}$ ,欲使该系统称为无失真传输系统,试确定  $R_1$  和  $R_2$ 。



题 5.1-3 图



题 5.2-1 图

5.2-2 如题 5.2-2 图所示框图中  $H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$ 。在  $\omega_c \geq \frac{1}{2}$  和  $\omega_c < \frac{1}{2}$  两种情况下,

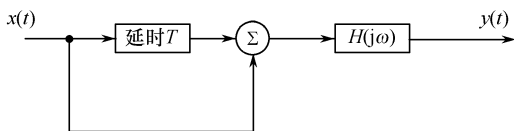
求输入为  $x(t) = \frac{2\sin \frac{t}{2}}{t}$  时的输出响应。哪种情况满足无失真传输条件?

5.2-3 信号  $x_1(t) = 1000G_{1000}(t)$  和  $x_2(t) = \delta(t)$  分别经过如题 5.2-3 图所示理想低通滤波器  $H_1(j\omega) = G_{40000\pi}(\omega)$  和  $H_2(j\omega) = G_{20000\pi}(\omega)$  后,相乘得到输出信号  $y(t) = y_1(t)y_2(t)$ 。

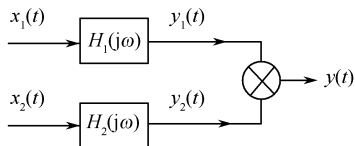
(1) 求  $X_1(j\omega)$  和  $X_2(j\omega)$ ;

(2) 求  $Y_1(j\omega)$  和  $Y_2(j\omega)$ ;

(3) 试确定  $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$  和  $y(t)$  的带宽。



题 5.2-2 图



题 5.2-3 图

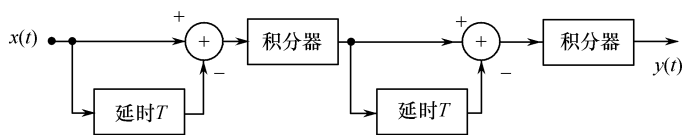
5.2-4 一因果和稳定的 LTI 系统具有如下频率响应:

$$H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$$

(1) 试证明  $|H(j\omega)| = K$ ,并求出常数  $K$  的值;

(2) 该系统是否是无失真系统,试说明原因。

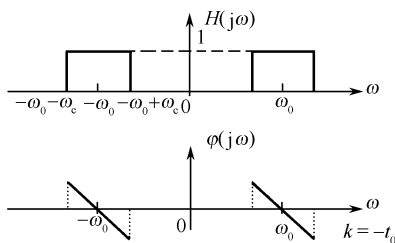
5.3-1 求如题 5.3-1 图所示系统的频率响应  $H(j\omega)$  和单位冲激响应  $h(t)$ 。



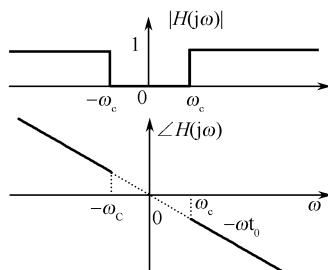
题 5.3-1 图

5.3-2 已知  $x(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \cos \omega_0 t$ , ( $\omega_0 \gg \omega_c$ ) 通过题 5.3-2 图所示的理想带通滤波器, 求输出响应。

5.3-3 求如题 5.3-3 图所示理想高通滤波器的单位冲激响应和单位阶跃响应。



题 5.3-2 图



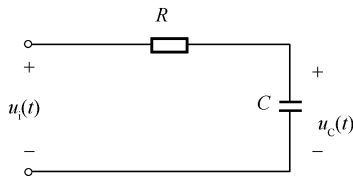
题 5.3-3 图

5.3-4 如题 5.3-4 图所示的 RC 电路是一种实际的滤波器。假定取电容器上电压  $u_C(t)$  作为输出,

(1) 写出输入电压  $u_i(t)$  和输出电压  $u_C(t)$  之间的微分方程;

(2) 令  $\omega_c = \frac{1}{RC}$ , 确定系统频率响应  $H(j\omega)$ , 并判断其滤波特性;

(3) 时间常数  $\tau = 1/\omega_c$ , 求系统单位冲激响应  $h(t)$  和阶跃响应  $S(t)$ 。



题 5.3-4 图 RC 电路

5.4-1 根据系统函数  $H(s)$  在  $s$  平面零、极点的分布, 利用  $s$  平面的几何分析法确定下列系统的幅频特性  $|H(j\omega)|$  近似是低通、高通、带通。

(1)  $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}, \text{Re}[s] > -1$ ;

(2)  $H_2(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}, \text{Re}[s] > -\frac{1}{2}$ ;

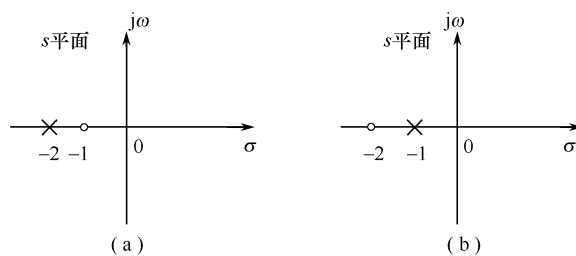
(3)  $H_3(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1}, \text{Re}[s] > -1$ ;

(4)  $H_4(s) = \frac{s^2 - 2s + 50}{s^2 + 2s + 50} = \frac{(s-1-j7)(s-1+j7)}{(s+1-j7)(s+1+j7)}, \text{Re}[s] > -1$

5.4-2 利用  $s$  平面的几何分析法确定信号  $X(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}, \text{Re}[s] > -\frac{1}{2}$  的幅频特性  $|X(j\omega)|$ 。

5.4-3 系统函数的极零点图如题 5.4-3 图所示, 试利用  $s$  平面的几何分析法确定信号幅频特性和相频特性。





题 5.4-3 图

- 5.4-4 \* 设计一个二阶的带通滤波器,中心频率  $\omega = 10$ ,当  $\omega = 0$  以及  $\omega = \infty$  时,系统增益均为零。提示:可以选择极点  $-a \pm j10$ ,分析  $a$  的取值对系统频率响应的影响。

## 第 6 章 抽样：从连续到离散的过渡

在一定条件下，一个连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔点上的值或样本来表示，并且可以用这些样本值将该信号全部恢复出来。这一点听起来有些令人难以相信，但是抽样定理的这个性质已经被广泛应用到人们生活当中去了。例如：电影就是由一组按照时序的单个画面（一帧）所组成的，其中每一帧都对应连续变化景象的一个时间样本（瞬时画面），当以足够快的速度来播放这些时序样本时，我们观看到了或者说重现了原来连续活动的景象。又比如，现在我们爱用 MP3 来听音乐，存储在 MP3 中的歌曲其实是该歌曲在时间上的样本值，但是 MP3 播放出来的歌曲确实又是连续流畅的。抽样定理的重要性就在于它搭建了连续时间信号和离散时间信号之间的桥梁。

在很多情况下离散时间信号的处理比连续时间信号的处理要灵活方便些。这主要是因为数字技术的飞速发展，产生了大量廉价、轻便、可编程且易于再生产的可资利用的离散时间系统的缘故。抽样的概念使人们想到了利用这些离散时间系统技术和资源来实现并处理连续时间信号：先对一个连续时间信号进行抽样，将其变换为离散时间信号，再用一个离散时间系统对其进行处理，最后再将其变换回为连续时间信号。最典型的例子就是数码相机，抽样下来的数码相片可以在计算机上用各种图像处理软件进行随心所欲的处理，只要高兴可以将其冲洗成相片，夹在影集中欣赏，或者制成不干胶贴照贴在冰箱上。

本章首先给大家建立抽样的概念，随后介绍时域抽样定理，即如何才能用一个连续时间信号的样本值来表示这个连续时间信号本身；并证明一个连续时间信号能真正由其样本值恢复出来的条件，以及实际抽样的过程；如何从样本值重建连续时间信号的过程，以及当条件不满足时带来的后果；由于时域和频域具有对称性，抽样也可在频域进行，因此最后还将向大家介绍频域抽样定理。

### 6.1 时域抽样

#### 6.1.1 抽样的数学模型

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为**抽样**，这个过程可以用图 6.1 所示的数学模型来表示。

图 6.1 中  $x(t)$  为被抽样的连续时间信号， $p_T(t)$  为**抽样序列**， $x_s(t)$  为已抽样的信号，简称**抽样信号**。根据图 6.1 所示的数学模型，抽样在时域可表示为

$$x_s(t) = x(t) \cdot p_T(t) \quad (6.1)$$

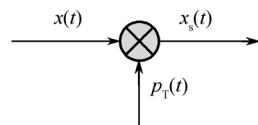


图 6.1 抽样的数学模型

由频域卷积定理有

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P_T(j\omega) \quad (6.2)$$

### 6.1.2 冲激串抽样

理想情况下,图 6.1 中抽样序列  $p_T(t)$  为

$$p_T(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (6.3)$$

式(6.3)中  $T$  为抽样间隔,对应的  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  为抽样频率。这样,式(6.1)变为

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)p_T(t) = x(t)\delta_T(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \end{aligned} \quad (6.4)$$

由式(6.4)可见,抽样信号  $x_s(t)$  为冲激串序列,其冲激强度等于被抽样信号  $x(t)$  以  $T$  为间隔的各时刻样本值  $x(nT)$ 。这说明抽样的本质是用连续时间信号的样本值来表示信号,如图 6.2(a) 所示。

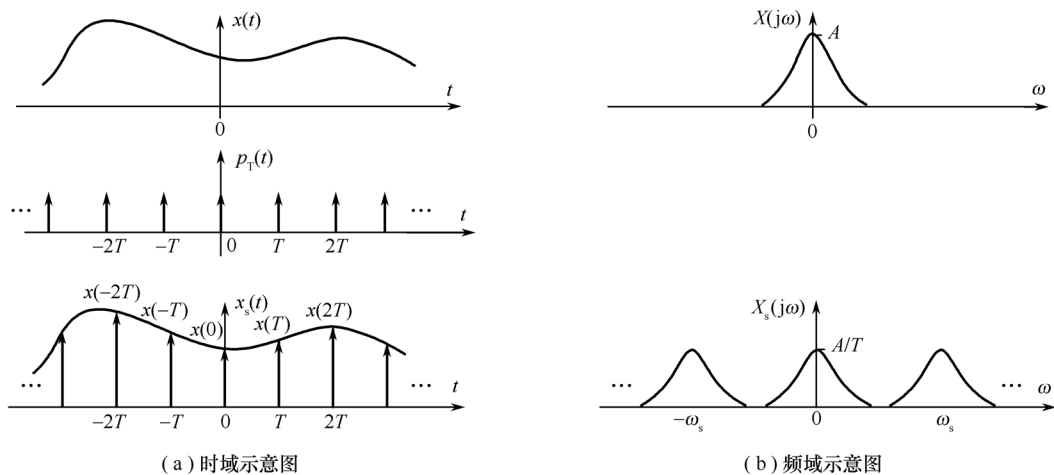


图 6.2 冲激串抽样示意图

对式(6.3)作傅里叶变换可得到抽样序列  $p_T(t)$  的频谱:

$$P_T(j\omega) = \mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad (6.5)$$

这样,式(6.2)变为

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P_T(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)] \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (6.6)$$

从式(6.6)可见,抽样信号的频谱  $X_s(j\omega)$  是频率  $\omega$  的周期函数,周期  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ ,它由一组移位的  $X(j\omega)$  组成,在幅度上标以  $1/T$  的变化。换句话说,在时域以  $T$  为间隔对连续时间信号进行理想抽样,相当于在频域将该信号的频谱以  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  为周期进行延拓,如图 6.2(b) 所示。

### 6.1.3 时域抽样定理

事实上,在很多抽样的应用中,抽样的目的不仅仅是为了得到原信号的一系列样本值,更常见的是为了在进行某些处理(存储、传输、变换)后,通过离散的样本值来恢复原信号,例如,数字声音采集系统的声音回放、数码影像的播放,等等。这种恢复对抽样的过程是有一定的要求的,也就是说不是任何信号都可以由它的离散时间样本来表示的,下面举例说明。

**【例 6.1.1】** 对一维连续时间信号  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$  进行抽样,试确定样本和信号之间的对应关系。

**解:** 对一维连续时间信号  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$  进行抽样,可能会得到相同的样本值  $x_s(t)$ ,如图 6.3 所示。由于  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$  与  $x_s(t)$  之间不存在一一对应关系,即使  $x_s(t)$  实际是由  $x_2(t)$  抽样得到的,但是我们可能利用  $x_s(t)$  恢复出来的是  $x_1(t)$  信号。

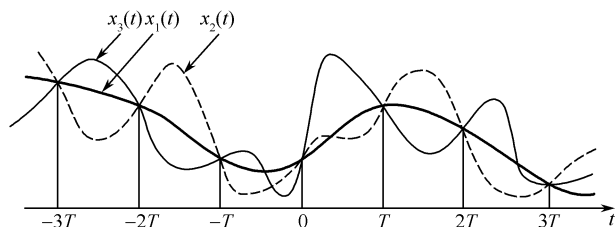


图 6.3 一维连续时间信号的抽样

例 6.1.1 题说明:如果没有任何条件限制,从连续时间信号抽样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。此外,对同一个连续时间信号,当抽样间隔不同时,也会得到不同的样本序列。因此,我们研究连续时间信号的抽样问题时主要关心两点:

(1) 在什么条件下,一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替,而不至于丢失原有的信息。

(2) 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地重构成原来的连续时间信号。

#### 6.1.3.1 信号的抽样

那么,在什么条件下,一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替,而不至于丢失原有的信息呢?

下面先来学习一个例子。

**【例 6.1.2】** 已知信号  $x(t) = \text{Sa}^2(5\pi t)$  [见图 6.4(a) 所示] 的频谱为  $X(j\omega) = 0.2\Lambda_{20\pi}$  [如图 6.4(b) 所示]。分别选用三种抽样速率  $f_s = 5\text{Hz}$ 、 $f_s = 10\text{Hz}$  和  $f_s = 15\text{Hz}$  对信号  $x(t)$  进行抽样,画出抽样信号及其频谱,并进行对比分析。

**解:** 信号最高频率为  $\omega_M = 10\pi \text{ rad/s}$ ,根据式(6.6)可知抽样信号的频谱  $X_s(j\omega)$  是频率  $\omega$  的周期函数,周期  $\omega_s = 2\pi/T$ ,它由一组移位的  $X(j\omega)/T = 0.2\Lambda_{20\pi}(\omega)/T$  组成。因此,将三种抽样速率  $f_s = 5\text{Hz}$ 、 $f_s = 10\text{Hz}$  和  $f_s = 20\text{Hz}$  的抽样间隔  $T$  和频率周期  $\omega_s$  信息列在表 6.1 中。

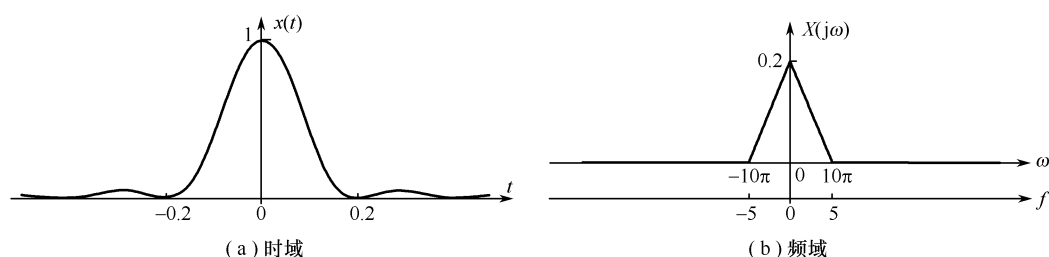


图 6.4 被抽样信号及其频谱

表 6.1 三种抽样信息比较

抽样速率 $f_s$	频率周期 $\omega_s$	抽样间隔 $T$	$0.2\Lambda_{20\pi}(\omega)/T$
5Hz	$10\pi$ rad/s	0.2s	$\Lambda_{20\pi}(\omega)$
10Hz	$20\pi$ rad/s	0.1s	$2\Lambda_{20\pi}(\omega)$
20Hz	$40\pi$ rad/s	0.05s	$4\Lambda_{20\pi}(\omega)$

第一种情况下,  $f_s = 50\text{Hz}$ , 则  $x(t)$  以  $T = 0.2\text{s}$  的间隔被抽样[如图 6.5(a) 所示], 抽样信号的频谱由  $\Lambda_{20\pi}(\omega)$  以  $\omega_s = 10\pi$  rad/s 为频率周期移位组成[如图 6.5(b) 所示]。

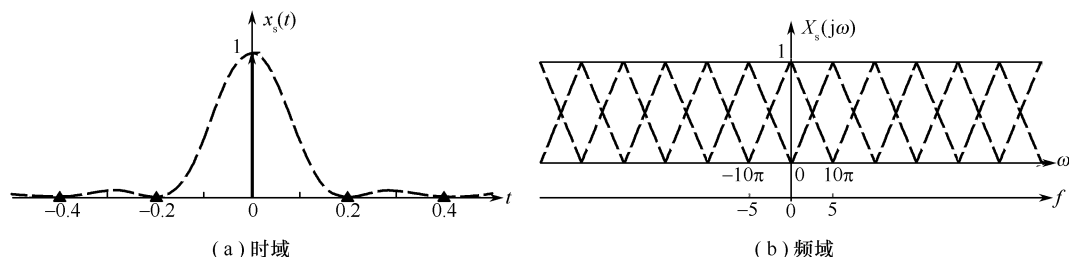


图 6.5 第一种情况下抽样信号及其频谱

第二种情况下,  $f_s = 10\text{Hz}$ , 则  $x(t)$  以  $T = 0.1\text{s}$  的间隔被抽样[如图 6.6(a) 所示], 抽样信号的频谱由  $2\Lambda_{20\pi}(\omega)$  以  $\omega_s = 20\pi$  rad/s 为频率周期移位组成[如图 6.6(b) 所示]。

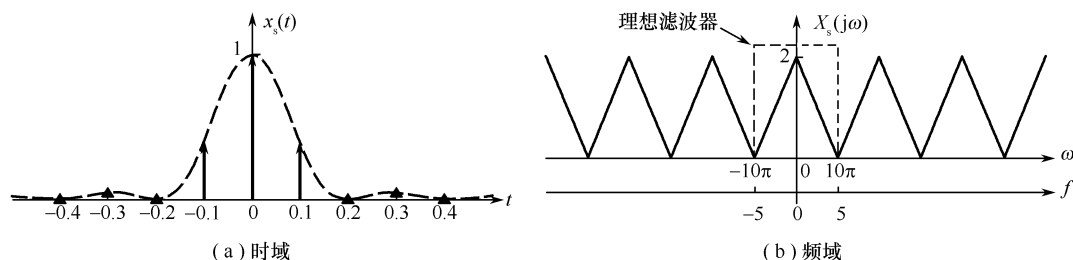


图 6.6 第二种情况下抽样信号及其频谱

第三种情况下,  $f_s = 20\text{Hz}$ , 则  $x(t)$  以  $T = 0.05\text{s}$  的间隔被抽样[如图 6.7(a) 所示], 抽样信号的频谱由  $4\Lambda_{20\pi}(\omega)$  以  $\omega_s = 40\pi$  rad/s 为频率周期移位组成[如图 6.7(b) 所示]。

由于信号  $x(t)$  频谱宽度  $2\omega_M = 20\pi$  rad/s, 在上述三种情况中, 第一种情况, 频率周期  $\omega_s = 10\pi$  rad/s, 小于信号频谱宽度, 频谱  $X(j\omega)/T$  在周期延拓成  $X_s(j\omega)$  的过程中相互重叠; 第二种情况, 频率周期  $\omega_s = 20\pi$  rad/s, 等于信号的频谱宽度, 频谱  $X(j\omega)/T$  在周期延拓成  $X_s(j\omega)$  的过程中刚好互不重叠; 第三种情况, 频率周期  $\omega_s = 40\pi$  rad/s, 大于信号的频谱宽度,

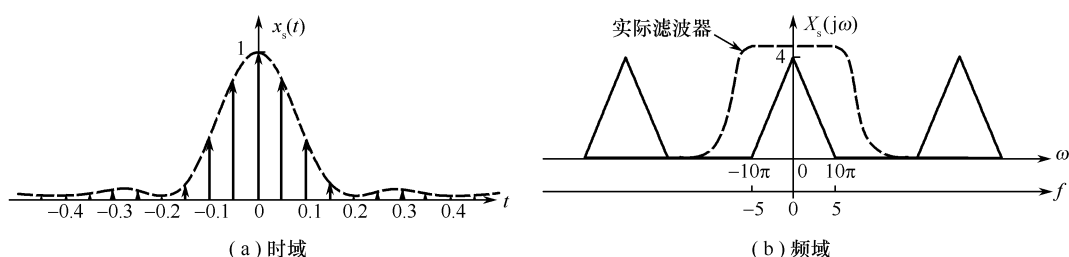


图 6.7 第三种情况下抽样信号及其频谱

频谱  $X(j\omega)/T$  在周期延拓成  $X_s(j\omega)$  的过程中互不重叠。也就是说,上述三种情况中,第二种情况和第三种情况下,抽样信号的频谱仅仅是原信号频谱的周期重复,其频谱形状未发生变化,仅是幅度大小变为原信号频谱的  $1/T$  而已,即原信号的频谱  $X(j\omega)$  “不失真”地重复出现在抽样信号频谱  $X_s(j\omega)$  的每一个周期上。将第二种情况和第三种情况下抽样信号的频谱,分别通过一个理想滤波器[如图 6.6(b) 虚线所示]或一个实际的滤波器[如图 6.7(b) 虚线所示]就可以无失真地恢复出原信号的频谱  $X(j\omega)$ 。

例 6.1.2 题说明,要想使抽样后的信号样本能完全代表原来的信号,就意味着要能够从  $X_s(j\omega)$  中不失真地分离出  $X(j\omega)$ 。这就要求频谱  $X(j\omega)/T$  在以频率  $\omega_s = 2\pi/T$  周期性延拓成  $X_s(j\omega)$  的过程中不能相互重叠。如果信号  $x(t)$  的最高频率为  $\omega_M$  ( $\omega_M = 2\pi f_M$ ),那么,就要求  $\omega_s \geq 2\omega_M$ ,或者说要求时域信号抽样速率  $f_s$  必须满足

$$f_s \geq 2f_M \quad (6.7)$$

由于抽样间隔  $T = 1/f_s$ ,则抽样间隔必须满足

$$T \leq \frac{1}{2f_M} = \frac{\pi}{\omega_M} \quad (6.8)$$

通常称信号  $x(t)$  的最高频率  $f_M$  为奈奎斯特频率;而满足式(6.7)的最小抽样速率  $f_s = 2f_M$  称为信号  $x(t)$  的奈奎斯特速率;满足式(6.8)的最大抽样间隔  $T = \pi/\omega_M$  称为信号  $x(t)$  的奈奎斯特间隔。

可见,一个连续时间信号  $x(t)$  可以唯一的由其样本  $x(nT)$  来确定而不致丢失原有的信息,必须满足两点要求:

(1)  $x(t)$  必须是带限的,即  $x(t)$  最高频率分量为  $\omega_M$ ,当  $|\omega| > \omega_M$ ,  $X(j\omega) = 0$ ;

(2) 抽样间隔  $T$  不能是任意的,必须小于  $x(t)$  的奈奎斯特间隔。或者说,抽样速率  $f_s$  不能是任意的,必须大于  $x(t)$  的奈奎斯特速率。

抽样速率  $f_s$  小于奈奎斯特速率的抽样,我们称之为欠抽样;抽样速率  $f_s$  等于奈奎斯特速率的抽样,我们称之为临界抽样;而抽样速率  $f_s$  大于奈奎斯特速率的抽样,为过抽样。欠抽样时,组成频谱  $X_s(j\omega)$  的  $X[j(\omega \pm k\omega_s)]/T$  相互重叠,从而使得抽样信号的频谱  $X_s(j\omega)$  形状发生了改变,不再含有和原信号频谱形状相同的部分,这种现象我们称为频谱混叠。

**【例 6.1.3】** 求例 6.1.2 中信号  $x(t) = \text{Sa}^2(5\pi t)$  奈奎斯特频率、奈奎斯特速率和奈奎斯特间隔。

**解:** 信号最高角频率为  $\omega_M = 10\pi \text{ rad/s}$ ,则奈奎斯特频率  $f_M = \omega_M/2\pi = 5\text{Hz}$ ,奈奎斯特速率为  $f_s = 2f_M = 10\text{Hz}$ ,奈奎斯特间隔  $T = 1/2f_M = \pi/\omega_M = 0.1\text{s}$ 。对例 6.1.2 中的三种抽样速率  $f_s = 5\text{Hz}$ 、 $f_s = 10\text{Hz}$  和  $f_s = 15\text{Hz}$  来说,第一种情况下  $f_s < 10\text{Hz}$  是欠抽样,第二种情况

下  $f_s = 10\text{Hz}$  是临界抽样,第三种情况下  $f_s > 10\text{Hz}$  是过抽样。

**【例 6.1.4】** 找出下列每个信号的奈奎斯特频率、奈奎斯特速率和奈奎斯特间隔。

$$(1)x(t) = 25\cos(5\pi t)$$

$$(2)x(t) = 25\cos(500\pi t)$$

$$(3)x(t) = 15G_2(t)$$

$$(4)x(t) = 10\text{Sa}(5\pi t)$$

$$(5)x(t) = 2\text{Sa}(5\pi t)\sin(500\pi t)$$

$$\text{解:}(1)x(t) = 25\cos(5\pi t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 25\pi[\delta(\omega - 5\pi) + \delta(\omega + 5\pi)]$$

该信号的最高频率(唯一频率)是  $\omega_M = 5\pi\text{rad/s}$ ,奈奎斯特频率  $f_M = 2.5\text{Hz}$ ,奈奎斯特速率  $f_s = 2f_M = 5\text{Hz}$ ,奈奎斯特间隔  $T = 1/2f_M = 0.1\text{s}$ 。

$$(2)x(t) = 25\cos(500\pi t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 25\pi[\delta(\omega - 500\pi) + \delta(\omega + 500\pi)]$$

该信号的最高频率(唯一频率)是  $\omega_M = 500\pi\text{rad/s}$ ,奈奎斯特频率  $f_M = 250\text{Hz}$ ,奈奎斯特速率  $f_s = 2f_M = 500\text{Hz}$ ,奈奎斯特间隔  $T = 1/2f_M = 0.001\text{s}$ 。

$$(3)x(t) = 15G_2(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 30\text{Sa}(\omega)$$

因为在有限的频率范围内  $\text{Sa}(\cdot)$  函数不会等于 0,所以信号的最高频率是无穷大,因此奈奎斯特频率、奈奎斯特速率也是无穷大,不存在奈奎斯特间隔。

$$(4)x(t) = 10\text{Sa}(5\pi t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2G_{10\pi}(\omega)$$

该信号的最高频率是  $\omega_M = 5\pi\text{rad/s}$ ,奈奎斯特频率  $f_M = 2.5\text{Hz}$ ,奈奎斯特速率  $f_s = 2f_M = 5\text{Hz}$ ,奈奎斯特间隔  $T = 1/2f_M = 0.2\text{s}$ 。

$$(5)x(t) = 2\text{Sa}(5\pi t)\sin(120\pi t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{j}{5}[G_{10\pi}(\omega + 120\pi) - G_{10\pi}(\omega - 120\pi)]$$

该信号的最高频率是  $\omega_M = 125\pi\text{rad/s}$ ,奈奎斯特频率  $f_M = 62.5\text{Hz}$ ,奈奎斯特速率  $f_s = 2f_M = 125\text{Hz}$ ,奈奎斯特间隔  $T = 1/2f_M = 0.008\text{s}$ 。

例 6.1.4 说明:对于平缓变化的信号,其细节较少,故高频成分也较少;而对于剧烈变化的信号,其细节较大,故高频成分较多。因为其频谱宽度不同,所以其各自的奈奎斯特速率也不相同,剧烈变化信号的奈奎斯特速率较大,而平缓变化信号的奈奎斯特速率较小,所以它们各自要求的抽样频率也就不相同。而对于时限信号,其频谱无限,不存在奈奎斯特速率。

**【例 6.1.5】** 由于数字化的视频和音频具有高保真、易存储等优点,所以它们一面世就极受欢迎。下面是两个应用实例。

(1)CCIR601 规定亮度信号与色度信号  $r-y$ 、 $b-y$  的抽样比  $4:2:2$ ,这是衡量数字视频信号是否达到广播级的一个重要国际统一标准。SONY 的 Betacam-SX 录像机采用  $13.5\text{MHz}$ 、 $6.75\text{MHz}$  分别作为亮度信号与色度信号  $r-y$ 、 $b-y$  的抽样速率。主要考虑有三点:其一,亮度信号抽样频率的选择必须兼顾不同的扫描制式,由于现行的扫描制式主要有 625 行/50 场和 525 行/60 场两种,它们的行频分别为  $15625\text{Hz}$  和  $15734.265\text{Hz}$ ,如果亮度抽样频率为  $13.5\text{MHz}$ ,恰好是上述两种行频的整数倍;其二,按照国际现行电视制式,亮度信号最大带宽是  $6\text{MHz}$ ,奈奎斯特速率等于  $2 \times 6 = 12\text{MHz}$ ,可见取  $13.5\text{MHz}$ ,满足抽样速率大于奈奎斯特速率条件;其三,人眼的视觉对亮度变化比对色度变化敏感度更高,色差信号的带宽可以比亮

度信号带宽窄得多,所以在分量编码时两个色差信号的抽样频率可以低一些,可以为亮度信号抽样频率的一半,即 6.75MHz。

(2) 人类的听力范围是 20Hz~20kHz,奈奎斯特速率是  $20\text{kHz} \times 2 = 40\text{kHz}$ ,所以 CD 音质采用 44.1kHz 抽样速率,稍高于奈奎斯特速率 40kHz。但在不同的实际应用中,音频的频率范围是不同的。例如,根据 CCITT 公布的声音编码标准,把声音根据使用范围分为以下三级:电话语音级:300Hz~3.4kHz;调幅广播级:50Hz~7kHz;高保真立体声级:20Hz~20kHz。因此,目前在多媒体系统中捕获声音的标准抽样速率定为 11.025kHz、22.05kHz、44.1kHz 三种,与电话语音、调幅广播和高保真立体声(CD 音质)三级使用相对应。而我们平常对语音信号的抽样,速率可选择  $8\text{kHz} (> 2 \times 3.4\text{kHz} = 6.8\text{kHz})$ 。

### 6.1.3.2 信号的恢复

讨论了信号抽样必须满足的条件之后,接下来要关心的问题就是,如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地重构成原来的连续时间信号呢?

通过前面例 6.1.2 题的分析发现,只要将  $X_s(j\omega)$  通过一个截止频率为  $\omega_M$  的理想低通滤波器,就可以得到频谱  $X(j\omega)/T$ 。为了完全准确的重建连续时间函数  $x(t)$ ,还要求该滤波器的通带增益为  $T$ 。即该滤波器的频率响应为

$$H(j\omega) = TG_{2\omega_M}(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < \omega_M \\ 0 & |\omega| > \omega_M \end{cases} \quad (6.9)$$

输出  $y(t)$  信号的频谱为

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X_s(j\omega)H(j\omega) = H(j\omega) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)] \\ &= TG_{2\omega_M}(\omega) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)] = X(j\omega) \end{aligned} \quad (6.10)$$

由傅里叶变换的唯一性可知

$$y(t) = x(t) \quad (6.11)$$

实际上,如果抽样速率  $f_s$  大于信号的奈奎斯特速率,则理想低通滤波器的截止频率为  $\omega_c$  可以大于信号的最高频率  $\omega_M$ ,满足  $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$  都可以得到式(6.10)和式(6.11)的结果,见下面的例子。

**【例 6.1.6】** 以  $f_s = 10\text{Hz}$  对信号  $x(t) = \text{Sa}(5\pi t)$  进行理想抽样后,通过图 6.8(b) 所示滤波器,试证明图 6.8(a) 所示系统对信号  $x(t) = \text{Sa}(5\pi t)$  来说是无失真传输系统。

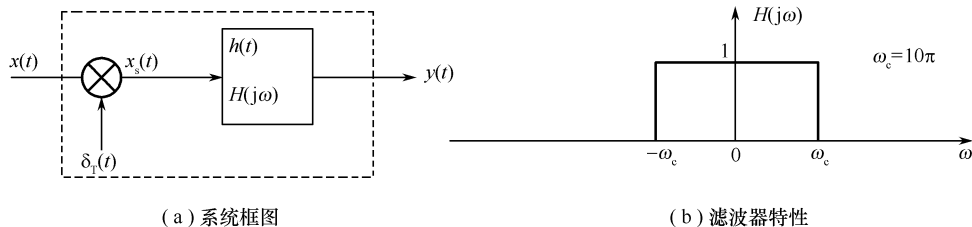


图 6.8 信号的抽样与恢复



解:  $x(t) = \text{Sa}(5\pi t) \xleftrightarrow{\text{FT}} 0.2G_{10\pi}(\omega)$ , 信号的最高频率是  $\omega_M = 5\pi \text{ rad/s}$   
 根据式(6.4)和式(6.6)有

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)\delta_T(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{0.2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{10\pi}[j(\omega - k\omega_s)], \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad T = 0.1\text{s} \end{aligned}$$

抽样速率  $f_s = 10\text{Hz}$  大于奈奎斯特速率  $2f_M = 5\text{Hz}$ , 为过抽样, 即频谱  $2G_{10\pi}(j\omega)$  在以  $\omega_s = 20\pi$  周期延拓时不会发生频谱混叠现象, 如图 6.9 所示。

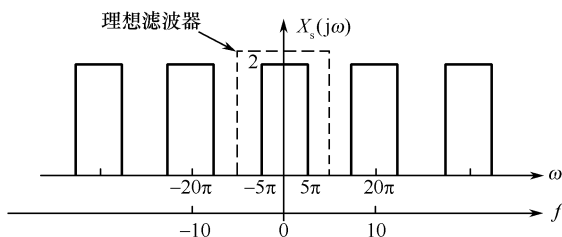


图 6.9 重建滤波器截止频率的选择

从图 6.9 可见, 将信号  $x_s(t)$  通过滤波器  $H(j\omega) = G_{2\omega_s}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$ ,  $\omega_c = 10\pi$  后,

由于  $5\pi < \omega_c < 15\pi$ , 从抽样信号频谱中取出和原信号频谱形状相同部分:  $2G_{10\pi}(\omega)$ , 即从抽样信号中恢复出信号  $y(t) = 10\text{Sa}(5\pi t) = 10x(t)$ 。

无论图 6.8(a) 所示系统内部对信号  $x(t)$  进行了何种处理, 其输入输出结果满足无失真的要求, 即图 6.8(a) 所示系统对信号  $x(t)$  来说是无失真传输系统。

将上述条件归纳一下, 可以得到**时域抽样定理**:

(1) 对带限于最高频率  $\omega_M$  的连续时间信号  $x(t)$ , 只有在以  $\omega_s \geq 2\omega_M$  的频率周期对其进行理想抽样时,  $x(t)$  可以唯一地由其样本  $x(nT)$  来确定而不丢失原有的信息;

(2) 如果需要从连续时间信号的离散时间样本  $x(nT)$  不失真地恢复成原来的连续时间信号  $x(t)$ , 需要将其样本值序列通过一个低通滤波器, 该理想滤波器的截止频率  $\omega_c$  必须满足  $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$  的条件, 其通带增益为  $T$ 。

## 6.2 实际抽样的过程

冲激串抽样是一种理想情况, 通过使用这种模型在 6.1 节我们研究了连续时间信号和抽样信号之间的关系, 得到了时域抽样定理。由于产生和传输接近冲激信号那样宽度窄、而幅度大的信号在工程上都很困难, 因此, 实际抽样过程并不是瞬间完成的, 抽样开关每完成一次抽样, 总是需要一定的时间。以抽样电信号为例, 最常用的方法就是使用抽样 / 保持(S/H) 和模 / 数转换器(ADC) 这两种设备。有时这两种设备会被集成在一个电子模块中。

这里我们仅介绍抽样 / 保持设备(S/H)。S/H 的激励源是模拟电压输入, 当 S/H 的抽样时钟脉冲到来时, 它会在输出端再生出输入电压作为响应, 并保持该电压, 直到下一个时钟脉冲

到来。抽样 / 保持电路基本原理如图 6.10 所示,它主要由保持电容  $C$ 、输入 / 输出缓冲放大器(均连接成跟随器形式),以及控制开关  $S$  组成。抽样期间,开关闭合,输入跟随器的输出给电容器  $C$  快速充电;保持期间,开关断开,由于输出缓冲放大器的输入阻抗极高,电容器上存储的电荷将基本维持不变,以保证 A/D 转换时的精确度。

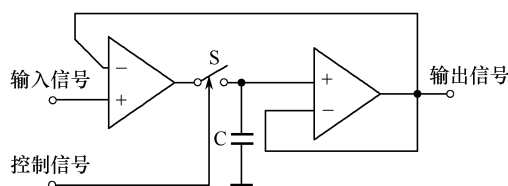


图 6.10 抽样保持电路

设输入的模拟电压为  $x(t)$ , 抽样时钟脉冲序列为  $p_T(t)$ , S/H 对输入电压的抽样发生在时钟脉冲持续时间, 如图 6.11 所示。在时钟脉冲持续期间, 输出电压信号很快从前一个值开始变化以跟踪输入激励信号的变化。在时钟脉冲结束后, 输出电压信号将保持固定值, 直到下一个时钟脉冲的发生。

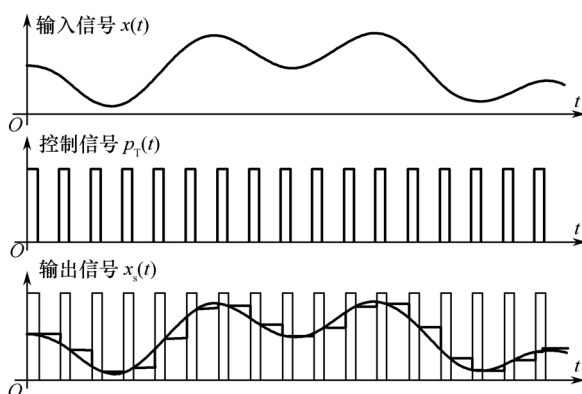


图 6.11 抽样保持电路的操作过程

假设理想 S/H 的时钟脉冲持续时间为零, 能获得信号的瞬时值并允许快速抽样。即假设理想 S/H 每个抽样脉冲的面积为 1, 并且在持续时间减小时, 保持面积不变, 则当时钟脉冲持续时间趋于零,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_T(t-nT) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ , 即时钟脉冲信号  $p_T(t) \rightarrow \delta_T(t)$ ; 理想抽样保持电路的抽样效果可以用 6.1 节中的冲激串抽样模型来表示。

实际上 S/H 后面会有一个 ADC 设备, 而 ADC 在 S/H 保持期间对 S/H 的输出信号进行模/数转换。S/H 和 ADC 共同作用的效果等同于在 S/H 时钟脉冲后沿位置处进行冲激抽样, 如图 6.12 所示。

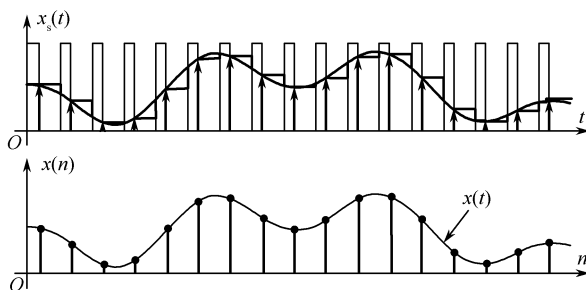


图 6.12 实际抽样输出信号

实际中还经常遇见一种抽样情况,即图 6.11 所示的输出信号在 S/H 的持续时间中等于输入信号  $x(t)$  的值,而在其余时间内为零,如图 6.13 所示。这种情况下的抽样称为**脉冲串抽样**,在通信和控制系统中又称为**脉冲幅度调制(PAM)**。

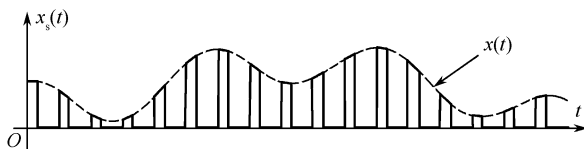


图 6.13 脉冲串抽样

在数学上,假设脉冲持续期间为  $\tau$ ,抽样间隔为  $T(T > \tau)$ ,脉冲序列  $p_T(t)$  可表示为

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\tau}(t - nT) \quad (6.12)$$

对式(6.12)作傅里叶变换可得到  $p_T(t)$  的频谱:

$$\begin{aligned} P_T(j\omega) &= \mathcal{F}[p_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right) \\ &= \omega_s \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (6.13)$$

式(6.13)中  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ , 为抽样频率。

如果被抽样的信号为  $x(t)$ , 则图 6.13 抽样信号是

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\tau}(t - nT) \quad (6.14)$$

变换到频域有

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left[ \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) X[j(\omega - n\omega_s)] \quad (6.15)$$

式(6.15)说明,脉冲串抽样后,抽样信号的频谱  $X_s(j\omega)$  是幅度加权了  $\frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$  后的周期延拓函数,延拓周期仍为  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ , 如图 6.14 所示。

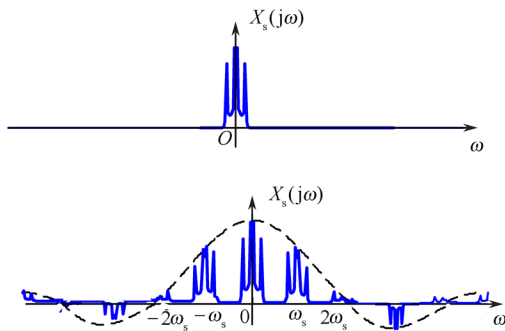


图 6.14 脉冲串抽样信号的频谱图

从图 6.14 可见,如果抽样间隔  $T$  满足时域抽样定理的要求,那么频谱  $X_s(j\omega)$  仍然是信号  $x(t)$  频谱的周期重复,每一个重复互不重叠,只不过乘上了不同的常数。同样可以用一个低通

滤波器将信号  $x(t)$  从  $x_s(t)$  中恢复出来。

为了能从  $x_s(t)$  恢复  $x(t)$ , 就要将抽样信号通过一个低通滤波系统  $H(j\omega)$ , 使得

$$X_s(j\omega)H(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) X[j(\omega - n\omega_s)] H(j\omega) = X(j\omega) \quad (6.16)$$

根据式(6.16),  $H(j\omega)$  应该满足

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{\tau} \frac{1}{\text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M) \quad (6.17)$$

## 6.3 实际信号的重建过程

### 6.3.1 内插公式和内插函数

由信号的离散时间样本重建连续时间函数  $x(t)$  的过程被称为内插。这一重建的结果可以是近似的,也可以是完全准确的。

式(6.10)是频域表示的完全准确的内插过程,称为理想内插。下面可从时域的角度来分析这个内插过程。

假设  $h(t)$  为理想低通滤波器的单位冲激响应,对式(6.9)表示的理想低通滤波器进行傅里叶反变换可得

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[TG_{2\omega_M}(\omega)] = \frac{T\omega_M}{\pi} \text{Sa}[\omega_M t] \quad (6.18)$$

将式(6.10)进行傅里叶反变换,可以得到其时域表示:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(n - nT) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) \\ &= \frac{\omega_M T}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}[\omega_M(t - nT)] \end{aligned} \quad (6.19)$$

式(6.19)称为时域抽样的“内插公式”,其中  $\text{Sa}(\cdot)$  称为内插函数。

式(6.19)表明:理想内插是以理想低通滤波器的单位冲激响应作为内插函数。在临界情况下,  $\omega_s = 2\omega_M$ , 即  $T = \pi/\omega_M$ , 式(6.19)的内插公式可以写成更简单的形式,即

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right] \quad (6.20)$$

式(6.20)描述了样本点  $x(nT)$  完全精确地拟合成一条连续曲线的过程,如图 6.15(d) 所示。图 6.15(d) 是图 6.15(c) 中的样本值按照式(6.20)中每一项叠加起来的结果。

同式(6.20)一样,利用理想低通滤波器的单位冲激响应的内插通常称为带限内插。因为这种内插,只要  $x(t)$  带限,而且抽样频率  $\omega_s$  满足时域抽样定理中的条件,就能真正实现信号的重建。然而,根据前面第5章的学习,我们知道理想低通滤波器是非因果的,物理不可实现,实际使用时需要对其作一个因果的近似;另外,即使该滤波器可以实现,式(6.20)表示,完全精确的理想内插每一个点的信息重建都必须要用到信号  $x(t)$  无限多个抽样点的信息,而无限

长时间的抽样在实际中也是不可能的,所以在很多情况下,宁可采用准确性差一些,但是比式(6.20)要简单一些的内插函数,来近似重建连续时间函数  $x(t)$ 。

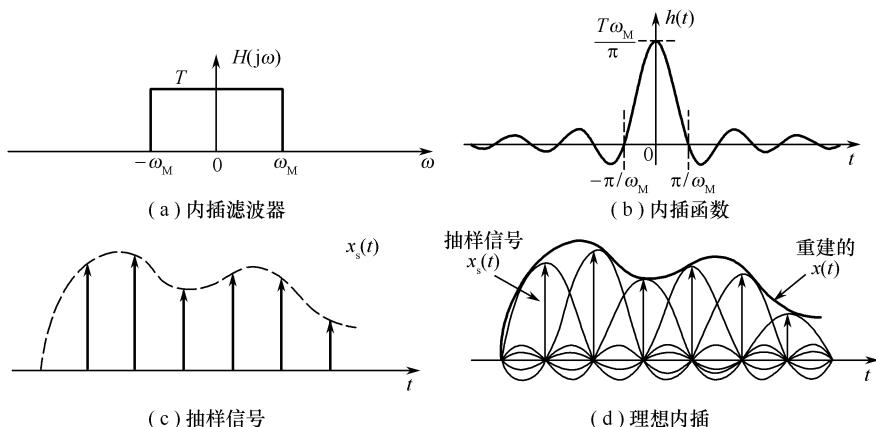


图 6.15 利用  $\text{Sa}$  函数的理想内插

### 6.3.2 零阶保持内插和线性内插

首先,我们来考虑最简单的插值滤波器,其冲激响应为  $G_T(t)$ ,如图 6.16(a) 所示。这种内插也叫零阶保持内插。

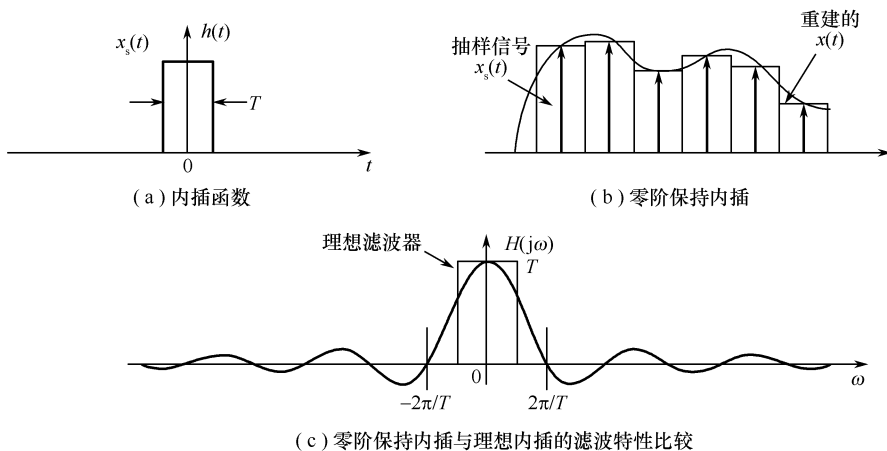


图 6.16 采用零阶保持的简单内插

零阶保持内插的内插公式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)G_T(t-nT) \quad (6.21)$$

式(6.21)描述了样本点  $x(nT)$  通过零阶保持的手段拟合成一条连续曲线的过程,如图 6.16(b) 所示。

对  $G_T(t)$  作傅里叶变换,可以得到零阶保持内插滤波器的频率响应,即

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[G_T(t)] = TSa\left(\frac{T}{2}\omega\right) \quad (6.22)$$

图 6.16(c) 给出了零阶保持内插函数的频率响应,并将其叠放在一个能实现理想内插的滤波器特性上,以供比较。可见,在这种情况下,系统  $h(t) = G_T(t)$  就代表对一个能实现理想内插的理想低通滤波器的近似。

从图 6.16(c) 可见,能够实现理想内插的低通滤波器,可以无失真地保留信号有效频带范围内的频谱分量,而滤除其他频率的信号分量。

零阶保持滤波器没有理想内插滤波器的绝对带宽,因为它的频率响应不可能在高于某个有限的频率之后全为零;另外,零阶保持滤波器在低频部分也不像理想内插滤波器那样具有完全平坦的幅度谱,所以,零阶保持内插重建的信号会出现一定程度的失真。但是零阶保持滤波器的幅频响应在每个周期延拓出来的频谱中心处为零,并且幅度随频率逐渐减小,以尽可能降低了频谱混叠引起的失真,如图 6.17 所示。在很多情况下,零阶保持内插代表了一种可能的(当然是粗糙的),样本值之间的内插。

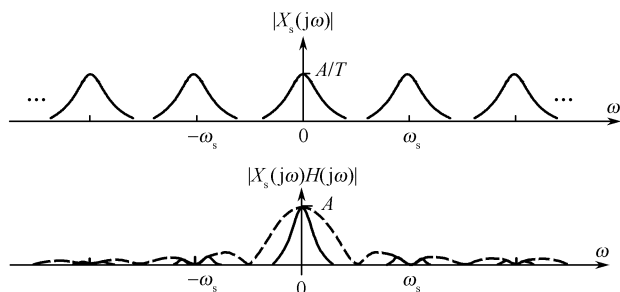
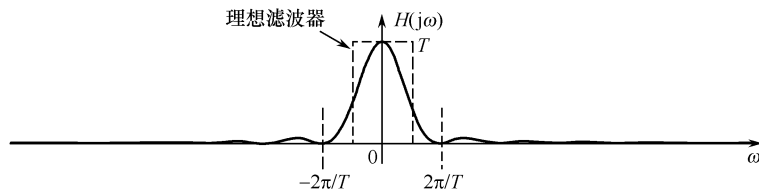
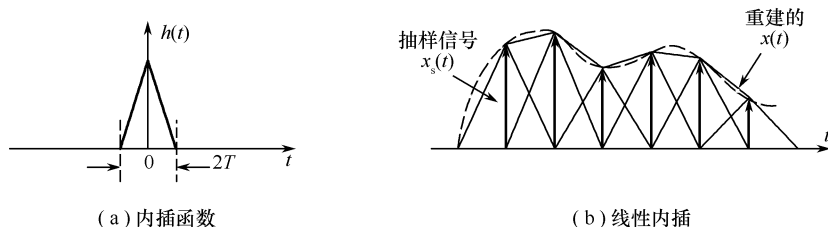


图 6.17 由零阶保持重建信号的幅度谱

接下来,我们考虑一个插值滤波器,其冲激响应为三角形脉冲  $\Lambda_{2T}(t)$ ,如图 6.18(a) 所示。以三角形脉冲为内插函数的这种内插,是一种简单而有用的内插形式,通常称之为线性内插,也叫一阶保持内插。线性内插相当于将相邻的样本点用直线连起来,如图 6.18(b) 所示。



(c) 线性内插与理想内插的滤波特性比较

图 6.18 样本点之间的线性内插

线性内插的内插公式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \Lambda_{2T}(t - nT) \quad (6.23)$$

式(6.23)描述了样本点  $x(nT)$  通过线性拟合的方法形成一条连续曲线的过程,如图 6.18(b)所示。

对  $\Lambda_{2T}(t)$  作傅里叶变换,可以得到线性内插滤波器的频率响应,即

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[\Lambda_{2T}(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{T}G_T(t) * G_T(t)\right] = \frac{1}{T}\left[T\text{Sa}\left(\frac{T}{2}\omega\right)\right]^2 = TSa^2\left(\frac{T}{2}\omega\right) \quad (6.24)$$

图 6.18(c) 给出了线性内插函数的频率响应,并将其叠放在一个能实现理想内插的滤波器特性上,以供比较。线性内插滤波器的频率响应与零阶保持滤波器相类似,但是幅度随频率衰减更快一些,可以进一步抑制混叠。所以对比图 6.16(b) 和图 6.18(b) 会发现线性内插比零阶保持内插的平滑度要高一些。

在更为复杂的内插公式中,样本点之间可以用高阶多项式或其他数学函数来拟合。它们所产生的信号具有更好的平滑度。

## 6.4 频谱混叠

几乎每个人都看见过频谱混叠的现象,只是可能不知道而已。例如,在电视上看一部西部电影,其中有辐条式车轮马车奔驰的场景。随着马车车轮转动速度的逐渐加快,虽然马车明显在前进,但由于电影通常以每秒 30 帧(人眼不宜察觉其不连续性)的速率播放(相当于电影图像以  $f_s = 30\text{Hz}$  的速率被抽样),当车轮的转速达到一定程度时( $f_s < 2f_M$ ),你会感觉到车轮停止向前转动反而向后转动起来,这是因为每秒 30 帧不满足对转动车轮的抽样条件,车轮的转速折叠下来。这就是混叠现象的例子。

根据时域抽样定理,如果信号带限于最高频率  $\omega_M$ ,若抽样速率  $f_s$  小于奈奎斯特速率  $2f_M$ ,即发生欠抽样。抽样信号  $x_s(t)$  的频谱不再是原信号频谱的周期重复,原信号频谱在周期延拓过程中周期谱图相互重叠,即相邻周期谱图之间高频与低频部分发生重叠,使得抽样信号频谱形状发生了变化,不再含有和原信号频谱形状相同的部分,出现了频谱混叠,如图 6.19 所示。如果以图 6.19 所示低通滤波器对信号进行恢复,将丢失原始信号中的高频信息,而相邻周期谱图中的低频信息又混了进来,即频谱混叠的结果将使得高于  $\omega_s/2$  的频谱分量以  $\omega_s/2$  为轴折叠下来,从而引起重建信号的失真。

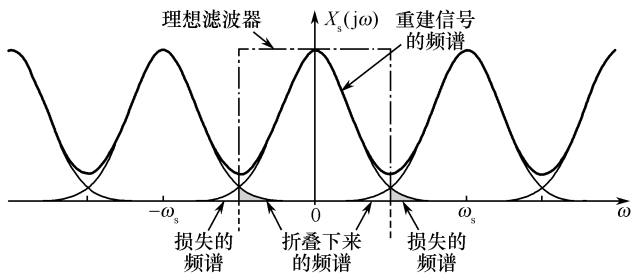


图 6.19 频谱混叠

图 6.19 说明,频谱混叠的直接表现就是信号频谱发生变化,高、低频成分发生混淆,又称为**频谱混叠效应**。

由于傅里叶分析的整个理论是建立在任何信号都可以分解为谐波信号的基础上的。因此,我们可以通过分析谐波信号的抽样来了解频谱混叠效应。

**【例 6.4.1】** 以小于奈奎斯特速率的抽样速率对谐波信号  $\cos\omega_0 t$  进行抽样分析。

**解:** 奈奎斯特速率  $2f_M = \omega_0/\pi$ , 抽样速率  $f_s < 2f_M$ , 欠抽样。谐波信号  $\cos\omega_0 t$  及其抽样结果参见图 6.20(a), (b)。仅利用这些抽样值, 就很有可能以为它们来自图 6.20(c) 的低频谐波信号。图 6.21 给出了该过程的频域解释。

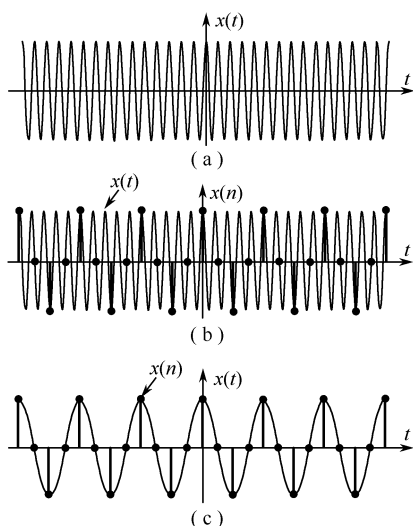


图 6.20 谐波信号欠抽样的时域效果

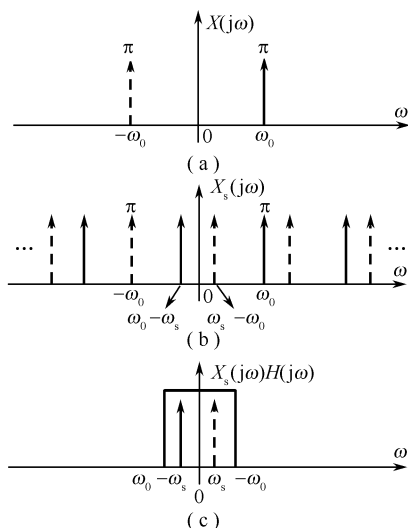


图 6.21 谐波信号欠抽样的频域效果

从频域来看, 连续时间信号  $\cos\omega_0 t$  的频谱为  $\pm\omega_0$  处的两根谱线, 如图 6.21(a) 所示, 当  $f_s < 2f_M$  时, 频谱混叠使得较高频率被折转到较低频率上了, 如图 6.21(b) 所示。此时, 通过理想低通滤波器恢复的信号为比  $\omega_0$  要低的谐波信号, 如图 6.21(c) 所示。

例 6.4.1 题说明: 如果抽样速率小于奈奎斯特速率, 欠抽样, 会使得抽样信号中混入了虚假的低频分量, 造成谐波信号的频率模糊。

当抽样速率  $f_s$  等于奈奎斯特速率  $2f_M$ ,  $X(j\omega)/T$  以  $\omega_s = 2\omega_M$  为周期移位形成抽样信号  $x_s(t)$  的频谱时, 刚好没有出现混叠, 如图 6.22 所示。理论上, 用一个理想滤波器就可以无失真地恢复出原信号的频谱  $X(j\omega)$  (如图 6.22 中虚线所示)。

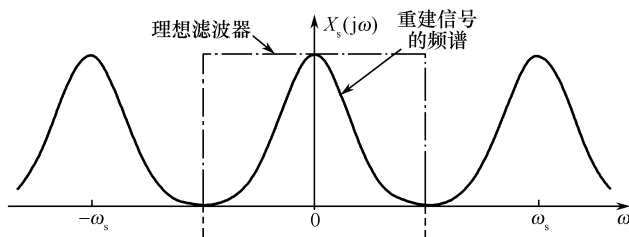


图 6.22 临界抽样信号的频谱

实际应用时, 如果抽样速率  $f_s$  等于奈奎斯特速率  $2f_M$ , 即抽样频率  $\omega_s = 2\omega_M$  时, 将不足以从样本恢复原信号的。下面举例说明这一点。

**【例 6.4.2】** 用图 6.23 所示频闪器去拍摄其右上角旋转圆盘在顺时针以角速度  $\omega_0$  旋转时圆盘上线条的位置。当频闪器的频闪拍摄速度  $\omega_s = 4\omega_0, 2\omega_0, 4\omega_0/3, \omega_0$  时, 试通过拍摄结果



确定旋转圆盘的旋转方向以及旋转角速度。

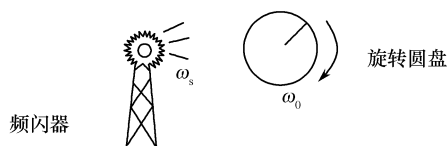


图 6.23 频闪器测速

解:当频闪器的频闪拍摄速度  $\omega_s = 4\omega_0, 2\omega_0, 4\omega_0/3, \omega_0$  时,在第 1、2、3、4 次测量得到的旋转圆盘上线条位置如图 6.24 所示。

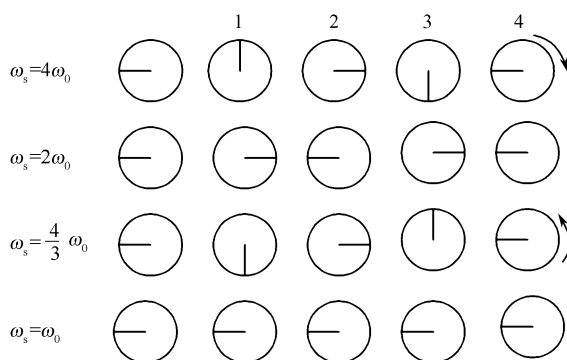


图 6.24 过抽样和欠抽样的频闪器测量结果

旋转圆盘在顺时针以角速度  $\omega_0$  旋转,其最高频率分量为  $\omega_0$ ,若对其图像进行抽样,奈奎斯特频率为  $f_0 = \omega_0/2\pi$ 。当频闪器以  $\omega_s$  去拍摄旋转圆盘的图像时,相当于旋转圆盘的图像以  $f_s = \omega_s/2\pi$  的速率被抽样。

从图 6.24 可见,当  $\omega_s = 4\omega_0$  时,  $f_s > 2f_0$ ,出现过抽样,从第 1、2、3、4 次测量得到的旋转圆盘上线条位置可得出圆盘在顺时针旋转,其旋转角速度等于  $\omega_s/4 = \omega_0$ 。

当  $\omega_s = 2\omega_0$  时,  $f_s = 2f_0$ ,无法从测量得到的旋转圆盘上线条位置判断出圆盘旋转方向:假设圆盘在顺时针旋转,则其旋转角速度等于  $\omega_s/2 = \omega_0$ ;但若假设圆盘在逆时针旋转,则也可推出其旋转角速度等于  $\omega_s/2 = \omega_0$ 。

当  $\omega_s = 4\omega_0/3$  时,  $f_s < 2f_0$ ,欠抽样,从第 1、2、3、4 次测量得到的旋转圆盘上线条位置,可得出圆盘在逆时针旋转的结论,其旋转角速度等于  $\omega_s/4 = \omega_0$ ,这与实际情况刚好相反。

而当  $\omega_s = \omega_0$  时,  $f_s < 2f_0$ ,欠抽样,根据第 1、2、3、4 次测量得到的旋转圆盘上线条位置的显示,圆盘没有旋转,这完全不符合实际情况。

例 6.4.2 说明,只有当抽样频率大于两倍的圆盘旋转频率,出现过抽样时,才得出了关于圆盘旋转方向以及旋转角速度的正确结论。当出现欠抽样时,欠抽样的结果使得圆盘的旋转频率被折叠下来,特别是当抽样速率等于圆盘的旋转频率,深度欠抽样的结果使得圆盘的旋转频率被混到零频率上去了,因而,无法通过拍摄结果确定出旋转圆盘的正确旋转方向以及旋转角速度。但是,当抽样频率两倍于圆盘的旋转频率时,同样无法通过拍摄结果确定出旋转圆盘的正确旋转方向以及旋转角速度。

同样,抽样速率  $f_s$  等于奈奎斯特速率  $2f_M$  时的频谱混叠效应,我们可以通过分析谐波信号的抽样来了解。

任何频率的谐波信号都可以表示为同频正弦信号和余弦信号之和:

$$\begin{aligned} A\cos(\omega_0 t + \theta) &= A\cos(\omega_0 t)\cos(\theta) - A\sin(\omega_0 t)\sin(\theta) \\ &= \underbrace{[A\cos(\theta)]}_{A_c}\cos(\omega_0 t) + \underbrace{[-A\sin(\theta)]}_{A_s}\sin(\omega_0 t) \\ &= A_c\cos(\omega_0 t) + A_s\sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (6.25)$$

式(6.25)中,  $A_c\cos(\omega_0 t)$  为谐波信号的余弦部分, 通常称为**同相分量**; 而  $A_s\sin(\omega_0 t)$  为谐波信号的正弦部分, 通常称为**正交分量**。因此, 谐波信号的抽样相当于分别对同相分量和正交分量抽样后再求和。

**【例 6.4.3】** 分别以奈奎斯特频率的 2 倍和 2.1 倍对谐波信号  $A\cos(\omega_0 t + \theta)$  进行抽样分析。

**解:** (1) 对  $A\cos(\omega_0 t + \theta)$  信号以奈奎斯特频率  $f_0 = \omega_0/2\pi$  的 2 倍进行抽样, 即抽样速率等于奈奎斯特速率。该抽样速率是否能确定谐波信号呢? 结果是否定的! 参见图 6.25 所示  $\cos\omega_0 t$  和  $\sin\omega_0 t$  的抽样。

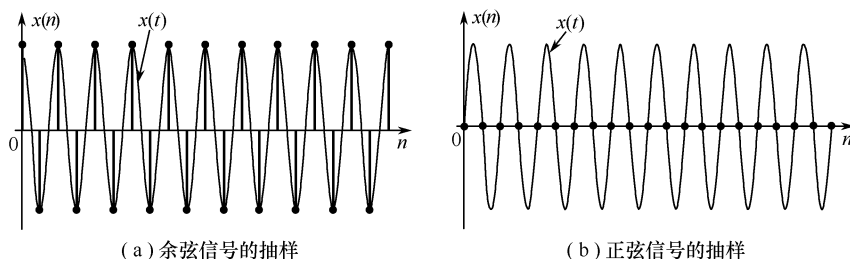


图 6.25 抽样速率等于奈奎斯特频率的 2 倍(抽样速率等于奈奎斯特速率)

从图 6.25(b) 可见, 当抽样速率等于奈奎斯特速率时, 正弦信号  $\sin\omega_0 t$  所有抽样值都为零, 即混叠效应造成了谐波信号正交分量的丢失。例如图 6.26 的谐波信号, 它和图 6.25(a) 余弦信号具有相同频率, 而且抽样值一样。

(2) 对  $A\cos(\omega_0 t + \theta)$  信号以奈奎斯特频率的 2.1 倍进行抽样, 即抽样速率略高于奈奎斯特速率。该抽样速率是否能确定谐波信号呢? 结果是肯定的! 参见图 6.27 所示  $\cos\omega_0 t$  和  $\sin\omega_0 t$  信号的抽样。

由于抽样速率略高于奈奎斯特速率, 所以谐波信号的同相分量和正交分量的抽样值并不总是过零点, 所以抽样值有足够的信息来重建谐波信号。

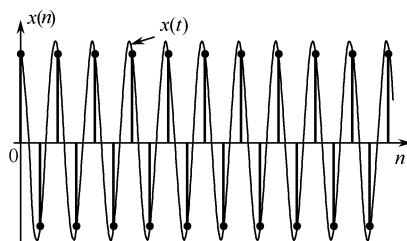


图 6.26 以奈奎斯特速率抽样时与余弦信号具有相同抽样值的谐波信号

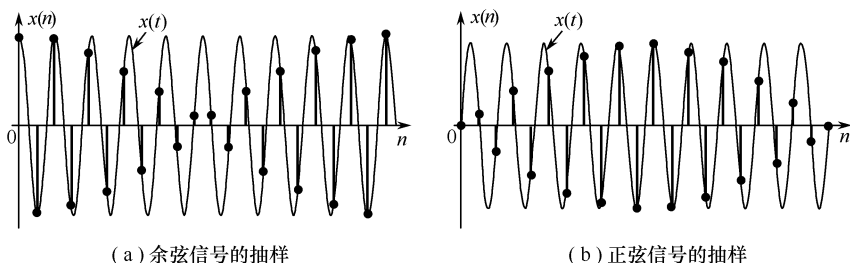


图 6.27 抽样速率等于奈奎斯特频率的 2.1 倍(抽样速率大于奈奎斯特速率)

例 6.4.3 说明以奈奎斯特速率对谐波信号抽样,丢失谐波信号的正交分量,根据式(6.25)可知,该混叠效应不会引起频率分量的模糊,但是会引起信号幅度和相位信息的模糊。

由此可知,从用样本代替信号的角度出发,工程应用中希望抽样速率能大于奈奎斯特速率,即过抽样。然而欠抽样在工程实际中还是有它的应用,见下面的例子。

**【例 6.4.4】** 在测量仪器中有一种抽样示波器,它借助抽样原理将欲观察而又不便观察显示的很高频率的信号折叠到一个较低的容易显示的频率上。这个很高频率的信号往往具有极短的时间波形(例如纳秒量级),由于最快的示波器的反应时间也比它长,因此这个波形无法直接显示。然而如果这个波形是周期的,可以用图 6.28 的想法来间接显示,即可对快速波形  $x(t)$  进行抽样,每个周期仅抽样一次,但在每个相邻的周期抽样依次推迟  $\Delta$ (根据  $x(t)$  的带宽而适当地选取的一个增量  $\Delta$ ,若信号  $x(t)$  最高频率分量为  $\omega_M$ 。该  $\Delta$  满足  $\pi/\Delta > \omega_M$ ),这样所得到的抽样信号通过一个合适的低通滤波器,可以得到信号  $y(t)$ ,该信号相当于对信号  $x(t)$  作了一个时域上展宽的尺度变换,即  $y(t) = x(at)$ ,  $0 < a < 1$ 。试确定  $a$  值和信号周期  $T$  和增量  $\Delta$  的关系。

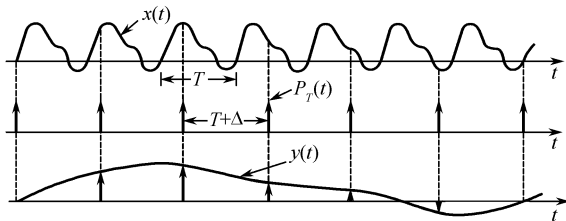


图 6.28 欠抽样示波器原理图

**解:** 信号  $x(t)$  最高频率为  $\omega_M$ , 即其频谱  $X(j\omega)$  的有效频带范围为  $(-\omega_M, \omega_M)$ , 奈奎斯特速率  $f_s = \omega_M/\pi$ , 则奈奎斯特间隔  $\Delta = 1/2f_M = \pi/\omega_M$ 。

如果对信号  $x(t)$  进行尺度变换,  $y(t) = x(at)$ ,  $0 < a < 1$ , 根据第 3 章学习的傅里叶变换的时频展缩特性, 其频谱  $Y(j\omega)$  的有效频带范围为  $(-a\omega_M, a\omega_M)$ 。尺度变换后的信号, 奈奎斯特速率  $f_s = a\omega_M/\pi$ , 奈奎斯特间隔  $T + \Delta = 1/f_s = \pi/a\omega_M$ 。

由于  $\Delta = \pi/\omega_M$ , 故  $T + \Delta = \Delta/a$ , 即  $a = \frac{\Delta}{T + \Delta}$ 。

## 6.5 频域抽样定理

抽样的本质是将连续变量的函数离散化, 在频域也可以对连续的频谱进行抽样。由于时域与频域是完全对偶的, 因此这一过程可以与时域抽样一样来分析。我们先画出频域抽样的数学模型, 如图 6.29 所示。

理想情况下, 图 6.29 中频域抽样信号为

$$P_{\omega_0}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (6.26)$$

式(6.26)中  $\omega_0$  为频谱抽样间隔。对式(6.27)作傅里叶反变换可得到频域抽样信号  $p_s(t)$  的时域表示:

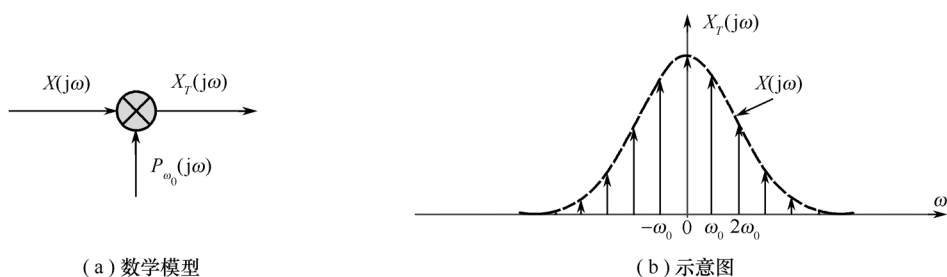


图 6.29 频域抽样

$$p_{\omega_0}(t) = \mathcal{F}^{-1}[P_{\omega_0}(j\omega)] = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi k}{\omega_0}\right) \quad (6.27)$$

根据图 6.29 的数学模型,抽样在频域可表示为

$$X_T(j\omega) = X(j\omega)P_{\omega_0}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0) \quad (6.28)$$

由时域卷积定理有

$$x_T(t) = x(t) * p_{\omega_0}(t) \quad (6.29)$$

将式(6.27)代入式(6.29),有

$$x_T(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi k}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - \frac{2\pi k}{\omega_0}\right) \quad (6.30)$$

式(6.30)表明:对信号  $x(t)$  的频谱进行频域理想抽样,相当于在时域将信号以  $T = 2\pi/\omega_0$  为周期无限延拓,如图 6.30 所示。

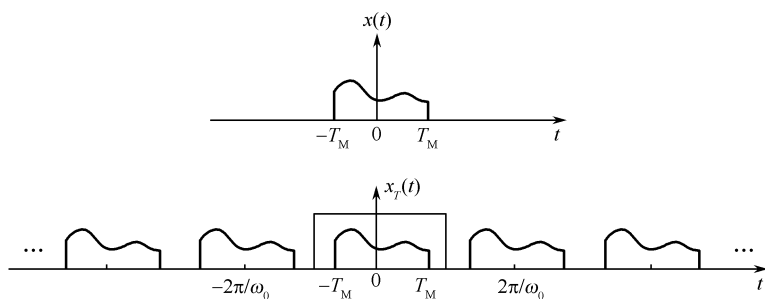


图 6.30 频域抽样的时域表现

要使频域抽样的样本能完全代表原信号,就必须保证信号在周期性延拓时不发生重叠。为此要求:

(1) 信号  $x(t)$  必须时限于  $T_M$ ,即  $x(t)$  仅在  $(-T_M, T_M)$  上有值;

(2) 频谱抽样间隔  $\omega_0$  不能是任意的,必须保证其对应的时域延拓周期  $T = 2\pi/\omega_0$  满足  $T > 2T_M$  的条件。

满足上述两个条件时,可以通过如图 6.31 所示的矩形窗,从周期性延拓的信号中截取出原信号。

图 6.31 所示的矩形窗可表示为

$$w(t) = \begin{cases} \omega_0 & |t| \leq \pi/\omega_0 \\ 0 & |t| > \pi/\omega_0 \end{cases} \quad (6.31)$$

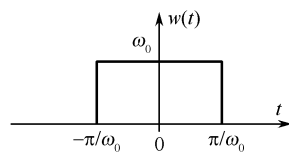


图 6.31 矩形窗函数

则恢复信号可表示为

$$x(t) = x_T(t)w(t) \quad (6.32)$$

式(6.32)的频域表示为

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X_T(j\omega) * W(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \right] * W(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) W(j\omega - jk\omega_0) \end{aligned} \quad (6.33)$$

式(6.33)表示:从频谱的样本重建信号  $x(t)$  的频谱时,其频域内插过程是以式(6.31)矩形窗的频谱作为内插函数实现的。对式(6.31)作傅里叶变换有

$$W(j\omega) = 2\pi \text{Sa}(\pi\omega/\omega_0) \quad (6.34)$$

将式(6.34)代入式(6.33),有

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) \text{Sa}\left(\pi \frac{\omega - k\omega_0}{\omega_0}\right) \quad (6.35)$$

将上述条件归纳一下,可以得到与时域抽样定理对偶的**频域抽样定理**:

(1) 对时限于  $T_M$  的连续时间信号  $x(t)$  的频谱进行理想抽样时,频谱抽样间隔  $\omega_0$  必须满足  $\frac{\pi}{\omega_0} > T_M$  的条件,这样  $X(j\omega)$  可以唯一地由其样本  $X(jk\omega_0)$  来确定而不致丢失原有的信息;

(2) 如果需要从  $X(j\omega)$  的离散时间样本  $X(jk\omega_0)$  不失真地恢复成原来信号的频谱  $X(j\omega)$ ,需要将其频域抽样后的周期信号  $x_T(t)$  通过一个矩形窗,该矩形窗的时宽  $\tau$  必须满足  $T_M < \frac{\tau}{2} < \left(\frac{2\pi}{\omega_0} - T_M\right)$  的条件,幅度增益为  $\omega_0$ 。

频域抽样定理揭示了信号时域和频域的一种对应关系,即频域抽样对应时域的周期性,这与前面我们所学习的“连续周期信号的频谱是离散的”相对应;由于时域抽样对应于频域的周期性,可以预见离散信号的频谱应该是具有周期性的,这一点我们在后续章节将会学习到。

应该指出:带限信号一定不时限;时限信号一定不带限。因此,对带限信号在频域抽样时,频谱的样本不能代表原信号,对时限信号在时域抽样时也是如此。

## 习 题 六

- 6.1-1 已知一实值信号  $x(t)$ ,当抽样频率  $\omega_s = 10000\pi$  时, $x(t)$  能用它的样本唯一确定,问  $X(j\omega)$  在  $\omega$  取何值时保证为 0?
- 6.1-2 试确定对下面各信号的最低允许抽样频率和最大允许抽样间隔:
- (1)  $\text{Sa}(100t)$  (2)  $\text{Sa}^2(100t)$
- (3)  $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}(50t)$  (4)  $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$
- (5)  $G_{300}(t)$
- 6.1-3 用截止频率为  $\omega_c = 1000\pi$  的理想低通滤波器可以从连续时间信号  $x(t)$  的样本  $x_s(t)$  恢复出  $x(t)$ ,如果还想对  $x(t)$  进行抽样,下列抽样周期哪些可以保证在利用一个合适的低通滤波器后能够再次恢复出  $x(t)$ ?
- (1)  $T = 0.5 \times 10^{-3}$  (2)  $T = 2 \times 10^{-3}$  (3)  $T = 10^{-4}$

6.1-4 试确定对下面各信号的奈奎斯特速率。

(1)  $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

(2)  $x(t) = 4\sin(4000\pi t) + 3\cos(7000\pi t)$

(3)  $x(t) = -10\sin(40\pi t)\cos(300\pi t)$

6.1-5 判断下面每一种说法的对错

(1) 只要抽样周期  $T < 2T_0$ , 信号  $x(t) = u(t+T_0) - u(t-T_0)$  的冲激串抽样就不会混叠;

(2) 只要抽样周期  $T < \frac{\pi}{\omega_0}$ , 频谱为  $X(j\omega) = u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)$  的信号  $x(t)$  的冲激串抽样就不会混叠;

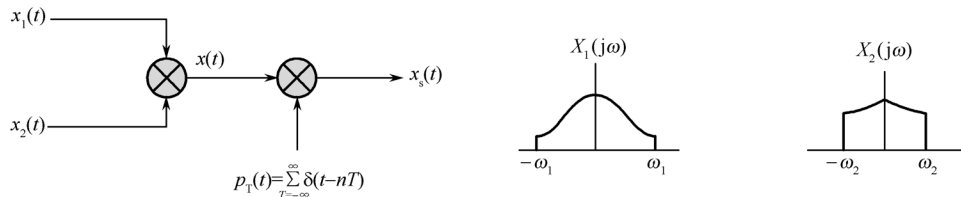
(3) 只要抽样周期  $T < \frac{2\pi}{\omega_0}$ , 频谱为  $X(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - \omega_0)$  的信号  $x(t)$  的冲激串抽样就不会混叠。

6.1-6 如题 6.1-6 图所示的系统中, 有两个时间函数  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$ , 其乘积  $x(t)$  被  $p_T(t)$  抽样,  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  均为带限信号:

$$X_1(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_1$$

$$X_2(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_2$$

为了保证  $x(t)$  能通过某一理想低通滤波器从  $x_s(t)$  中恢复出来, 试求最大的抽样间隔  $T$ ?



题 6.1-6 图

6.1-7 已知信号  $x(t)$  的奈奎斯特速率为  $f_0$ , 试确定对下面各信号的奈奎斯特速率:

(1)  $y(t) = x(t) + x(t-1)$

(2)  $y(t) = dx(t)/dt$

(3)  $y(t) = x^2(t)$

(4)  $y(t) = x(t)\cos\omega_0 t, \omega_0 = 2\pi f_0$

6.2-1 对信号  $x(t) = 10\text{Sa}(500\pi t)$ , 通过乘以脉冲串  $p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{0.0001}(t-nT)$ ,  $T = 0.001$  来进行抽样, 从而得到抽样信号  $x_s(t)$ , 试画出  $x_s(t)$  及其频谱  $X_s(j\omega)$ 。

6.2-2 对信号  $x(t) = \text{Sa}(200\pi t)$ , 通过乘以脉冲串  $p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\tau}(t-nT)$ ,  $\tau = 0.8\text{ms}$ ,  $T = 4\text{ms}$  来进行抽样, 从而得到抽样信号  $x_s(t)$ 。

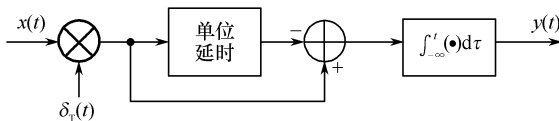
(1) 若  $x_s(t)$  通过一个单位增益、截止频率  $\omega_c = 200\pi \text{ rad/s}$  的理想低通滤波器, 试求滤波器的输出信号  $y(t)$ 。

(2) 若  $x_s(t)$  通过一个单位增益、截止频率  $200\pi \text{ rad/s} < \omega_c < 300\pi \text{ rad/s}$  的理想低通滤波器, 试求滤波器的输出信号  $y(t)$ 。

(3) 若  $x_s(t)$  通过一个单位增益、截止频率  $\omega_c > 300\pi \text{ rad/s}$  的理想低通滤波器, 试求滤

波器的输出信号  $y(t)$ 。

- 6.2-3 对信号  $x(t) = \text{Sa}(200\pi t)$ , 通过乘以脉冲串  $p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_\tau(t-nT)$  来进行抽样, 从而得到抽样信号  $x_s(t)$ , 若  $T$  等于信号奈奎斯特间隔, 而  $\tau = T/2$ , 试画出  $x_s(t)$  及其频谱  $X_s(j\omega)$ 。
- 6.2-4 如题 6.2-4 图所示系统, 已知  $x(t)$  是频带受限  $(-\omega_m, \omega_m)$  的连续时间信号。



题 6.2-4 图

- (1) 求  $\mathcal{F}[y(t)]$ ;
- (2) 为了从  $y(t)$  中恢复原信号  $x(t)$ , 试确定  $\omega_m$  和  $T$  的关系;
- (3) 确定  $y(t)$  应通过怎样的滤波器才能恢复出  $x(t)$ 。
- 6.3-1 信号  $x(t)$  用抽样周期为  $T$  的冲激串  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$  抽样后,  $x_s(t)$  经过一个零阶保持内插处理, 输出信号  $x_0(t)$ , 而  $x_1(t)$  是  $x_s(t)$  经过一个一阶保持内插处理的输出信号, 试给出一个滤波器的频率响应, 若该滤波器的输入信号为  $x_0(t)$ , 则该滤波器的输出信号为  $x_1(t)$ 。
- 6.3-2 设信号  $x(t)$  为一带限信号, 当  $|\omega| > \pi/T$ ,  $X(j\omega) = 0$ 。

- (1) 若用抽样周期为  $T$  的冲激串  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$  对其抽样, 试确定一个内插函

数  $h(t)$ , 使得  $dx(t)/dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$ ;

- (2) 函数  $h(t)$  唯一吗?

- 6.3-3 设以速率  $f_s$  对  $x(t) = \sin(2\pi t)$  进行抽样, 下述公式用 MATLAB 画出时间范围  $-1 < t < 1$  的内插波形。

$$x(t) \cong 2 \frac{f_c}{f_s} \sum_{n=-N}^N x(nT) \text{Sa}[\omega_c(t-nT)], \omega_c = 2\pi f_c$$

给定的  $f_s, f_c$  和  $N$  的参数如下。

- |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|
| (1) $f_s = 4, f_c = 2, N = 1$  | (2) $f_s = 4, f_c = 2, N = 2$   |
| (3) $f_s = 8, f_c = 4, N = 4$  | (4) $f_s = 8, f_c = 2, N = 4$   |
| (5) $f_s = 16, f_c = 8, N = 8$ | (6) $f_s = 16, f_c = 8, N = 16$ |

- 6.3-4 对于每个给定的信号和抽样速率, 用 MATLAB 画出原信号在  $-1 < t < 1$  的图形, 以及抽样值之间使用零阶保持内插和一阶保持内插后的图形。(画零阶保持内插图形, 本题可使用 MATLAB 的 stairs 函数)

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| (1) $f_s = 8, x(t) = \sin(2\pi t)$ | (2) $f_s = 32, x(t) = \sin(2\pi t)$ |
| (3) $f_s = 8, x(t) = G_1(t)$       | (4) $f_s = 8, x(t) = \Delta_1(t)$   |

- 6.4-1 一个实值奇函数的周期信号  $x(t)$ , 其傅里叶级数表示为

$$x(t) = \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(k\pi t)$$

抽样周期为  $T = 0.2\text{s}$  的冲激串  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  抽样后

(1)  $x_s(t)$  会发生混叠吗?

(2) 若  $x_s(t)$  通过一个截止频率为  $\pi/T$  和通带增益为  $T$  的理想低通滤波器, 求输出信号  $y(t)$  的傅里叶级数表示。

6.4-2 现以  $f_s = 8\text{Hz}$  对信号  $x_1(t) = e^{-t}$  和  $x_2(t) = e^{-t} + \sin(8\pi t)$  进行抽样, 试证明两者的抽样值相同。

6.4-3 对于下面的信号, 以给定速率进行抽样, 试求出抽样信号的频谱, 并解释为什么两个信号的抽样值相同。

(1)  $x_1(t) = 4\cos(16\pi t)$ ,  $x_2(t) = 4\cos(76\pi t)$ ,  $f_s = 30$

(2)  $x_1(t) = 6\text{Sa}(8\pi t)$ ,  $x_2(t) = 6\text{Sa}(8\pi t)\cos(400\pi t)$ ,  $f_s = 100$

(3)  $x_1(t) = 9\cos(14\pi t)$ ,  $x_2(t) = 9\cos(98\pi t)$ ,  $f_s = 56$

6.5-1 试画出以下信号幅度谱, 并计算其傅里叶反变换, 并证明它们不是时限信号。

(1)  $X(j\omega) = G_1(\omega)e^{-j2\omega}$  (2)  $X(j\omega) = \Delta_{100}(\omega)e^{-j\omega/2}$

(3)  $X(j\omega) = \delta(j\omega - 4\pi) + \delta(j\omega + 4\pi)$

(4)  $X(j\omega) = j[\delta(j\omega - 4\pi) + \delta(j\omega + 4\pi)] * G_8(\omega)$



## 第 7 章 离散时间信号的频域分析

在第 3 章中我们研究了将连续信号分解为正弦或指数信号之和的方法。这一章要对离散时间信号讨论类似的结果,采用的途径与连续时间信号所用的是完全并行的。首先,将周期序列  $x(n)$  表示为由离散时间复指数(或正弦)及其谐波构成的傅里叶级数,然后再将这种表示推广到非周期序列  $x(n)$ ,这里仍将  $x(n)$  作为周期信号在周期趋于无穷大时的极限情况来对待。

### 7.1 离散时间傅里叶级数(DTFS)

一个连续时间正弦信号  $\cos \omega t$  无论  $\omega$  取何值,都是一个周期信号。对于离散正弦序列  $\cos \Omega n$  (或指数  $e^{j\Omega n}$ ) 情况并非如此,仅当  $\Omega/2\pi$  为一个有理数时,  $\cos \Omega n$  才是周期的。细看一下可以发现,如果这个正弦是以  $N$  为周期的话,那么

$$\cos \Omega(n+N) = \cos \Omega n$$

就可得到证实,上式仅在

$$\Omega n = 2\pi m \quad (m \text{ 为整数})$$

时才有可能,这里  $m$  和  $N$  都是整数。所以  $\Omega/2\pi = m/N$  是一个有理数。于是,一个正弦  $\cos \Omega n$  (或指数  $e^{j\Omega n}$ ) 是周期的话,唯有

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad (\text{为有理数}) \quad (7.1)$$

当这个条件( $\Omega/2\pi$  是有理数)满足时,  $\cos \Omega n$  的基波周期  $N$  为

$$N = m \frac{2\pi}{\Omega} \quad (7.2)$$

为了得到  $N$ , 必须选择使上式右边成为一个整数的最小  $m$  值, 如若  $\Omega = 4\pi/17$ , 那么使  $m(2\pi/\Omega) = m(17/2)$  成为最小  $m$  值是整数 2。因此

$$N = m \frac{2\pi}{\Omega} = 2 \times \frac{17}{2} = 17$$

对于正弦序列  $\cos(0.8n)$  就不是一个周期信号, 因为  $0.8/2\pi$  不可能是一个有理数。

#### 7.1.1 周期信号的离散时间傅里叶级数表示

一个周期为  $T$  的连续时间周期信号可以表示成一个三角函数形式的傅里叶级数, 这个级数由基波频率为  $\omega_0 = 2\pi/T$  的正弦及其谐波组成。这个傅里叶级数的指数函数形式由指数信号  $e^{j0t}, e^{\pm j\omega_0 t}, e^{\pm j2\omega_0 t}, \dots$  组成。

采用并行的方法可将一个离散时间周期信号表示为一个离散时间傅里叶级数。已经知道周期为  $N$  的周期信号  $x(n)$  满足下式:

$$x(n) = x(n+mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

使上式成立的最小  $N$  值就是基波周期, 对应基波频率是  $\Omega_0 = 2\pi/N$ 。一个周期为  $N$  的周期信

号  $x(n)$  能表示成离散时间傅里叶级数, 这个级数由基波频率为  $\Omega_0 = 2\pi/N$  的正弦及其谐波组成。跟连续时间情况一样, 它既可以用三角函数形式傅里叶级数, 也可用指数函数形式傅里叶级数, 从描述简便和易于数字运算来看, 指数形式比三角形式更为可取, 因此, 本章只讨论离散时间傅里叶级数的指数形式。

指数形式傅里叶级数由指数信号  $e^{j0n}, e^{\pm j\Omega_0 n}, e^{\pm j2\Omega_0 n}, \dots$  等组成。从表面看似乎会有无限多个谐波, 但可以证明对于任何频率相隔  $2\pi$  (或  $2\pi$  的整数倍) 的离散指数信号是完全一样的。因为

$$e^{j(\Omega \pm 2\pi m)n} = e^{j\Omega n} \cdot e^{\pm j2\pi mn} = e^{j\Omega n} \quad (m \text{ 为整数})$$

这个结果说明第  $k$  次谐波与第  $(k+N)$  次谐波是一样的。为了说明这个, 设  $g_k$  为第  $k$  次谐波  $e^{jk\Omega_0 n}$ , 那么

$$g_{k+N} = e^{j(k+N)\Omega_0 n} = e^{j(k\Omega_0 n + 2\pi n)} = e^{jk\Omega_0 n} = g_k \quad (7.3)$$

同样可证明

$$g_k = g_{k+N} = g_{k+2N} = \dots = g_{k+mN} \quad (m \text{ 为整数}) \quad (7.4)$$

据此, 第1次谐波与第  $(N+1)$  次谐波一样, 第2次谐波与第  $(N+2)$  次谐波一样, 以此类推。换句话说, 实际仅存在  $N$  个独立的谐波, 并且它们的频率位于某一  $2\pi$  区间内。这意味着不像连续时间那样, 离散时间傅里叶级数仅有有限项 ( $N$  项)。另外还可看到, 这个  $2\pi$  频带可以取为从  $0 \sim 2\pi$ , 或任何宽度为  $2\pi$  的连续频带。这表示可以在  $0 \leq k \leq N-1$  内选取  $N$  个独立谐波  $e^{jk\Omega_0 n}$ , 或者在  $-1 \leq k \leq N-2$  内, 或者在  $1 \leq k \leq N$ , 或者在任何其他合适的区间内选取。这些选取中全都有相同的谐波, 尽管它们有不同的阶次。

现在考虑第一种选取, 它对应于  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  的指数信号  $e^{jk\Omega_0 n}$ 。对于一个周期为  $N$  的周期信号  $x(n)$  的傅里叶级数仅由这  $N$  个谐波组成, 并且能表示为

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (7.5)$$

为了计算式(7.5)傅里叶级数中的系数  $X_k$ , 现将式(7.5)两边同时乘以  $e^{-jm\Omega_0 n}$ , 然后从  $n=0$  到  $(N-1)$  对  $n$  求和:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm\Omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j(k-m)\Omega_0 n} \quad (7.6)$$

交换式(7.6)右边的求和次序后, 右边的和式可得

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\Omega_0 n}$$

可以很容易证明内求和对全部  $k \neq m$  值均为零, 仅当  $k = m$  时为非零值  $N$ 。这就意味着外部和式仅有一项  $X_m N$  (对应于  $k = m$ )。因此, 式(7.6)的右边是等于  $X_m N$ , 即有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm\Omega_0 n} = X_m N$$

因为  $m = k$ , 故上式可写成

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (7.7)$$

这样对于一个周期为  $N$  的周期信号  $x(n)$  的离散时间傅里叶级数(DTFS)表示为

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (7.8)$$

其中

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (7.9)$$

式(7.8)是时域到频域的变换,称正变换, $X_k$ 称为 $x(n)$ 的DTFS系数。式(7.9)是从频域到时域的变换,称为反变换。常常将式(7.8)和式(7.9)记作 $x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFS}} X_k$ 。

### 7.1.2 周期信号的频谱

周期信号的傅里叶级数由下面 $N$ 个分量组成,即

$$X_0, X_1 e^{j\Omega_0 n}, X_2 e^{j2\Omega_0 n}, \dots, X_{N-1} e^{j(N-1)\Omega_0 n}$$

这些分量的频率分别为 $0, \Omega_0, 2\Omega_0, \dots, (N-1)\Omega_0$ ,其中 $\Omega_0 = 2\pi/N$ 。第 $k$ 次谐波的大小是 $X_k$ ,将这个值 $X_k$ 作为频率 $\Omega$ (或序号 $k$ )的函数作图,得到的图称为周期信号 $x(n)$ 的频谱,用它一眼就能看到 $x(n)$ 各个不同谐波分量的大小。

一般来说傅里叶系数 $X_k$ 是复数,它能用极坐标来表示,即

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} \quad (7.10)$$

$|X_k|$ 对 $\Omega$ 的图称为幅度谱, $\angle X_k$ 对 $\Omega$ 的图称为相位谱,这两个图合在一起就是 $x(n)$ 的频谱。已知这些频谱就能根据式(7.8)重构或合成 $x(n)$ 。因此,傅里叶频谱在一切方面都是等效于 $x(n)$ 作为 $n$ 函数的图,它只是描述周期信号 $x(n)$ 的另一种方法。信号的傅里叶频谱构成了 $x(n)$ 的频域描述。

离散周期信号傅里叶级数表示非常类似于连续周期信号傅里叶级数的表示,只是一般来讲连续时间信号的频谱带宽是无限大,并且由无穷多个谐波指数分量所组成。与此相反,离散时间周期信号的频谱是带限的,并且最多只有 $N$ 个分量。

由数学知识知道,如果 $\varphi(k)$ 是一个周期为 $N$ 的 $k$ 的周期函数,那么

$$\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(k) = \sum_{k=\langle N \rangle} \varphi(k) \quad (7.11)$$

式中, $k = \langle N \rangle$ 表示上式求和是当 $k$ 在 $N$ 个相继整数区间上进行的。由于 $\varphi(k)$ 是以 $N$ 为周期的,所以相同的值都会以周期 $N$ 重复。因此, $\varphi(k)$ 的任意 $N$ 个相继值的和一定是相同的,无论这个求和从什么 $k$ 值开始。从根本上说,它代表的是一个完整周期内的和。

将这个结果应用到DTFS中,可以看到由于

$$e^{-jk\Omega_0(n+N)} = e^{-jk\Omega_0 n} \cdot e^{-j2\pi k} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

所以 $e^{-jk\Omega_0 n}$ 是以 $N$ 为周期的。因此,若 $x(n)$ 是以 $N$ 为周期的,则 $x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$ 也是以 $N$ 为周期的。所以,由式(7.10)可得 $X_k$ 也是以 $N$ 为周期的, $X_k e^{jk\Omega_0 n}$ 也是。由式(7.11)能将式(7.8)和式(7.9)表示为

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n} \quad (7.12)$$

以及

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (7.13)$$

如果将 $X_k$ 对全部 $k$ 值(不只是 $0 \leq k \leq N-1$ )作图,那么频谱 $X_k$ 是以 $N$ 为周期的。另外

式(7.12)表明,  $x(n)$  不仅能被对应于  $0 \leq k \leq N-1$  的  $N$  个指数分量合成, 而且从任何  $k$  值起始的任何相继  $N$  个指数分量都能将它合成。为此, 通常都将频谱  $X_k$  对应全部的  $k$  值(不只是区间  $0 \leq k \leq N-1$ ) 都画出来。但是从频谱合成  $x(n)$  的角度, 需牢记的是进行相加的仅为  $N$  个相继分量。

以  $\Omega$  为横轴,  $X_k$  每隔  $2\pi$  间隔重复; 以  $k$  为横轴,  $X_k$  每隔  $N$  间隔重复。式(7.12)和式(7.13)表明,  $x(n)$  及其频谱  $X_k$  都是以  $N$  为周期的, 两者在一个周期内都有完全相同的分量个数  $N$ 。

由式(7.13)可见, 一般  $X_k$  是复数, 若周期序列  $x(n)$  是实函数, 则  $X_{-k}$  就是  $X_k$  的共轭, 据此

$$|X_k| = |X_{-k}| \quad \text{和} \quad \angle X_k = -\angle X_{-k} \quad (7.14)$$

这样, 幅度谱  $|X_k|$  和相位谱  $\angle X_k$  分别是  $k$  (或  $\Omega$ ) 的偶函数和奇函数。上面所有概念都将在例 7.1.1 中予以阐明, 通过此例让读者熟悉 DTFS 的基本概念。

**【例 7.1.1】** 试求图 7.1(a) 所示序列  $x(n) = \sin 0.1\pi n$  的离散时间傅里叶级数(DTFS), 画出其幅度谱和相位谱。

**解:** 正弦序列  $x(n) = \sin 0.1\pi n$  是周期的, 因为  $\Omega/2\pi = 1/20$  是一个有理数, 而由式(7.2)得其周期  $N$  为

$$N = m \frac{2\pi}{\Omega} = m \left( \frac{2\pi}{0.1\pi} \right) = 20m$$

使  $20m$  成为整数的最小  $m$  值是  $m = 1$ 。因此, 周期  $N = 20$ , 而基波频率  $\Omega_0 = 2\pi/N = 0.1\pi$ 。从式(7.12)有

$$x(n) = \sum_{k=\langle 20 \rangle} X_k e^{j0.1\pi kn}$$

其中求和是在任意 20 个  $k$  的相继值上进行。现将这个范围选为  $-10 \leq k < 10$ , 这样选取对应基本频率范围  $(-\pi < \Omega < \pi)$  内的频率分量合成  $x(n)$ , 于是有

$$x(n) = \sum_{k=-10}^9 X_k e^{j0.1\pi kn}$$

其中, 根据式(7.13), 有

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{20} \sum_{n=-10}^9 \sin 0.1\pi n e^{-j0.1\pi kn} = \frac{1}{20} \sum_{n=-10}^9 \frac{1}{2j} (e^{j0.1\pi n} - e^{-j0.1\pi n}) e^{-j0.1\pi kn} \\ &= \frac{1}{40j} \sum_{n=-10}^9 (e^{j0.1\pi n(1-k)} - e^{-j0.1\pi n(1+k)}) \end{aligned}$$

在这些和式中,  $k$  取  $-10 \sim 9$  之间的全部值。上式右边第一和式除  $k = 1$  时有值为 20 外, 对于其余的  $k$  值均为零。同理, 第二个和式除  $k = -1$  时有值为 20 外, 对于其余的  $k$  值均为零。因此

$$X_1 = \frac{1}{2j} \quad \text{和} \quad X_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

而所有其他系数都为零。对应的傅里叶级数为

$$x(n) = \sin 0.1\pi n = \frac{1}{2j} (e^{j0.1\pi n} - e^{-j0.1\pi n}) \quad (7.15)$$

这里的基波频率  $\Omega_0 = 0.1\pi$ , 仅有两个非零分量:

$$X_1 = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{和} \quad X_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

因此

$$|X_1| = |X_{-1}| = \frac{1}{2}$$

$$\angle X_1 = -\pi/2 \quad \text{和} \quad \angle X_{-1} = \pi/2$$

在区间  $(-10 \leq k < 10)$  内  $X_k$  的频谱图如图 7.1(b) 和图 7.1(c) 所示。按照式(7.15), 总共只有两个分量分别对应于  $k=1$  和  $k=-1$ , 剩下 18 个分量都是零。第  $k$  个分量  $X_k$  是频率  $k\Omega_0 = 0.1k\pi$  的幅度。因此, 对应于  $-10 \leq k < 10$  的频率区间是  $-\pi \leq \Omega < \pi$ , 如图 7.1(b) 和图 7.1(c) 所示。在范围  $-10 \leq k < 10$  ( $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ ) 内的频谱足以表征频域描述(傅里叶级数), 并且通过将这些频谱分量相加就能合成  $x(n)$ 。由于在 7.1.1 节曾讨论过, 频谱  $X_k$  是  $k$  的周期函数, 周期为  $N=20$ 。为此, 将这个频谱以周期为  $N=20$  (或  $\Omega=2\pi$ ) 重复, 如图 7.1(b) 和图 7.1(c) 所示, 这就是在  $-10 \leq k < 10$  范围内频谱的周期延拓。可以看到, 幅度谱和相位谱分别为  $k$  (或  $\Omega$ ) 的偶函数和奇函数。

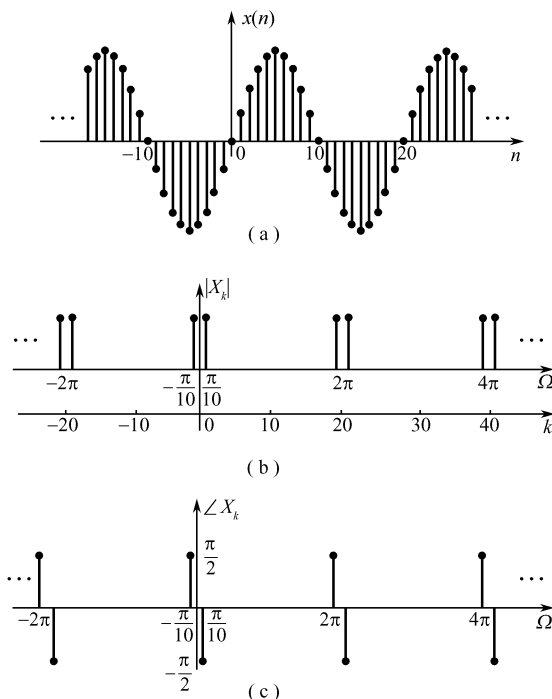


图 7.1 离散时间正弦序列  $x(n) = \sin 0.1\pi n$  和它的频谱

式(7.15)的结果是一个三角函数恒等式, 本来就可以直接得到而不用如此复杂的求傅里叶系数。在此我们是有意这样做的, 其目的是加深对离散时间傅里叶级数和它的周期性的理解。傅里叶级数是通过利用指数形式及其谐波表示一个周期信号  $x(n)$  的一种方法。式(7.15)的结果表明:  $\sin 0.1\pi n$  能由两个指数信号  $e^{j0.1\pi n}$  和  $e^{-j0.1\pi n}$  合成。

由于离散时间指数  $e^{jk\Omega_0 n}$  的周期性, 傅里叶级数分量可以在任意长度为  $N=20$  (或  $\Omega=2\pi$ ) 的范围内选取。例如若选这个频率范围为  $0 \leq \Omega < 2\pi$  (或  $0 \leq k < 20$ ), 得到的傅里叶级数为

$$x(n) = \sin 0.1\pi n = \frac{1}{2j} (e^{j0.1\pi n} - e^{j1.9\pi n}) \quad (7.16)$$

这个级数与式(7.15)的级数式是等效的, 因为指数  $e^{j1.9\pi n}$  和  $e^{-j0.1\pi n}$  是等效的, 这是由于

$e^{j1.9\pi n} = e^{j1.9\pi n} \cdot e^{-j2\pi n} = e^{-j0.1\pi n}$  的缘故。

【例 7.1.2】求图 7.2(a) 所示周期矩形脉冲序列的离散时间傅里叶级数。

解: 由图 7.2(a) 可见其周期为  $N = 32$ , 则其基频  $\Omega_0 = 2\pi/32 = \pi/16$ , 因此

$$x(n) = \sum_{k=\langle 32 \rangle} X_k e^{jk(\pi/16)n} \quad (7.17)$$

其中

$$X_k = \frac{1}{32} \sum_{n=\langle 32 \rangle} x(n) e^{-jk(\pi/16)n}$$

为了方便上式运算选择区间为  $-16 \leq n < 15$ , 其他任何同样宽度(32 个点)的区间也会给出相同结果。

$$X_k = \frac{1}{32} \sum_{n=-16}^{15} x(n) e^{-jk(\pi/16)n} \quad (7.18)$$

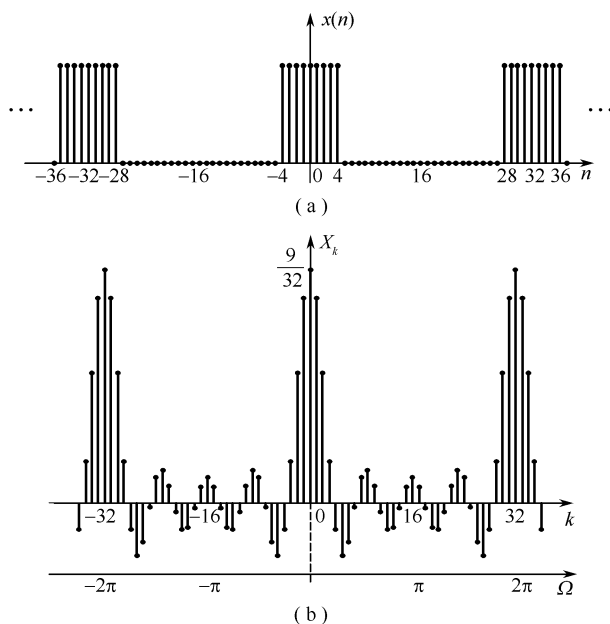


图 7.2 周期矩形脉冲序列和它的频谱

由于仅当  $-4 \leq n \leq 4$ , 有  $x(n) = 1$ , 而对其余的  $n$  均为零, 因此

$$X_k = \frac{1}{32} \sum_{n=-4}^4 e^{-jk(\pi/16)n}$$

这是一个公比为  $e^{-j(\pi/16)k}$  的几何级数, 因此

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{32} \left[ \frac{e^{-j(5\pi k/16)} - e^{j(4\pi k/16)}}{e^{-j(\pi k/16)} - 1} \right] \\ &= \frac{1}{32} \frac{e^{-j(0.5\pi k/16)} [e^{-j(4.5\pi k/16)} - e^{j(4.5\pi k/16)}]}{e^{-j(0.5\pi k/16)} [e^{-j(0.5\pi k/16)} - e^{j(0.5\pi k/16)}]} \\ &= \left( \frac{1}{32} \right) \frac{\sin\left(\frac{4.5\pi k}{16}\right)}{\sin\left(\frac{0.5\pi k}{16}\right)} = \left( \frac{1}{32} \right) \frac{\sin(4.5k\Omega_0)}{\sin(0.5k\Omega_0)}, \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{16} \end{aligned} \quad (7.19)$$

这个频谱如图 7.2(b) 所示。

图 7.2(a) 所示的周期矩形脉冲序列的 DTFS 为

$$x(n) = \sum_{k=\langle 32 \rangle} \frac{1}{32} \frac{\sin(4.5k\Omega_0)}{\sin(0.5k\Omega_0)} e^{-jk\frac{\pi}{16}n}$$

## 7.2 非周期信号的傅里叶变换

### 7.2.1 非周期信号的傅里叶积分表示

在 7.1 里已成功地将周期信号表示成指数信号之和,这一节要将这种表示扩展到非周期信号。这个过程在概念上与第 3 章对连续时间信号所用的是相同的。

一个有限长非周期性信号  $x(n)$ , 即

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

如图 7.3(a) 所示。由这个非周期信号,我们可以构成一个周期信号  $x_N(n)$ , 它由信号  $x(n)$  每隔  $N$  个单位重复形成,如图 7.3(b) 所示。周期  $N$  选得足够大,以避免重复时发生重叠,即  $N \geq 2N_1 + 1$ 。这个周期信号  $x_N(n)$  能用指数傅里叶级数表示。若设  $N \rightarrow \infty$ , 信号  $x(n)$  就会在一个无限大的间隔之后重复,因此

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(n) = x(n)$$

于是代表  $x_N(n)$  的傅里叶级数也一定在极限  $N \rightarrow \infty$  下代表  $x(n)$ 。已知  $x_N(n)$  的指数傅里叶级数为

$$x_N(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\Omega_0 n}, \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (7.20)$$

其中

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x_N(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (7.21)$$

上式右边因在一个周期内求和,所以  $x_N(n) = x(n)$ , 而且求和式的上下限应该从  $-N_1 \sim N_1$ , 但是由于  $|n| > N_1$  时,  $x(n) = 0$ , 所以上式求和限从  $-\infty \sim \infty$  也完全没有影响, 即

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (7.22)$$

设  $X_k$  的包络  $X(\Omega)$  为

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad (7.23)$$

根据这个定义和式(7.22)有

$$X_k = \frac{1}{N} X(\Omega) \big|_{\Omega=k\Omega_0} \quad (7.24)$$

这个结果表明,傅里叶系数  $X_k$  是  $X(\Omega)$  以每隔  $\Omega_0$  取得样本的  $1/N$  倍。现在将信号  $x(n)$  以双倍  $N$  重复。双倍  $N$  会使基频  $\Omega_0$  减小一半,导致相继谱分量之间的间隔也降低一半,因此在这个频谱中就有两倍多的分量。与此同时,  $N$  加倍,系数  $X_k$  的包络也减小一半。若再继续重复这

个将  $N$  加倍的过程,则在每一步中分量的数目都会加倍,频谱逐渐变得愈来愈密集,而它的幅度  $|X_k|$  变得愈来愈小,但是这个包络的相对形状仍然是一样的。在极限条件下当  $N \rightarrow \infty$  时,基频  $\Omega_0 \rightarrow 0$  和  $X_k \rightarrow 0$ 。相邻谐波之间的间隔  $\Omega_0$  趋于零(无穷小),频谱也变得非常密集,其表现就像连续的一样。但是,随着谐波数目无限增加,谐波幅度也变得无限小。

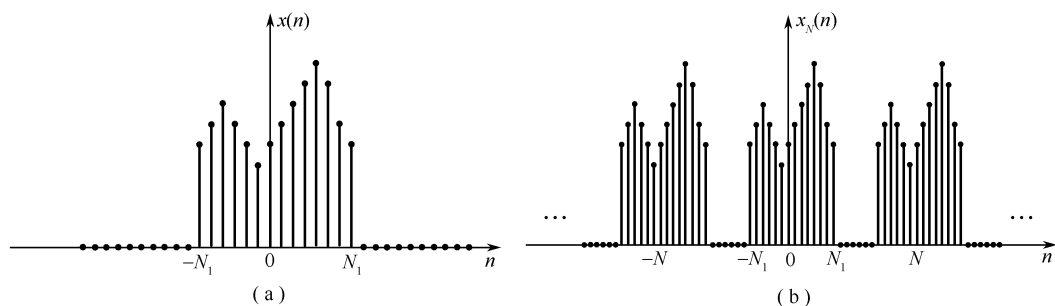


图 7.3 (a) 有限长序列  $x(n)$ ; (b) 由  $x(n)$  构成的周期序列  $x_N(n)$

令  $N \rightarrow \infty$ , 根据式(7.23), 有

$$X(k\Omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (7.25)$$

利用式(7.24), 能将式(7.20) 表示为

$$x_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \cdot \Omega_0 \quad (7.26)$$

在极限  $N \rightarrow \infty$  下,  $\Omega_0 \rightarrow 0$  和  $x_N(n) \rightarrow x(n)$ , 因此

$$x(n) = \lim_{\Omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \cdot \Omega_0 \quad (7.27)$$

由于  $\Omega_0$  变成无穷小, 将  $\Omega_0$  用一个无穷小符号  $\Delta\Omega$  替代, 且

$$\Delta\Omega = 2\pi/N \quad (7.28)$$

则式(7.27) 可表示成

$$x(n) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\Delta\Omega) e^{jk\Delta\Omega n} \cdot \Delta\Omega \quad (7.29)$$

范围  $k = \langle N \rangle$  隐含着  $N$  个谐波数的区间, 按照式(7.28), 即  $N\Delta\Omega = 2\pi$ 。这样, 在极限情况下, 式(7.29) 右边变成为积分

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (7.30)$$

其中  $\int_{2\pi}$  表明积分可以在任何连续的  $2\pi$  区间内进行。频谱  $X(\Omega)$  为

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad (7.31)$$

式(7.30) 表明, 非周期信号  $x(n)$  可表示成复指数信号的线性组合, 这些复指数信号在频率上是连续变化的, 它们的幅度是  $X(\Omega) d\Omega/2\pi$ 。为此, 像在连续时间情况一样, 称  $X(\Omega)$  为  $x(n)$  的



离散时间傅里叶正变换(DTFT),称  $x(n)$  是  $X(\Omega)$  的离散时间傅里叶反变换(IDTFT),可简记为

$$X(\Omega) = \text{DTFT}[x(n)] \quad \text{和} \quad x(n) = \text{IDTFT}[X(\Omega)]$$

两者的关系可记作  $x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$ 。

### 7.2.2 傅里叶频谱的特性

现在讨论离散时间傅里叶变换及其有关频谱的几个重要特性。

1. 傅里叶频谱是  $\Omega$  的连续函数

虽然  $x(n)$  是一个离散时间信号,但它的 DTFT,即  $X(\Omega)$  却是  $\Omega$  的连续函数;因为  $\Omega$  是一个连续变量,它可以从  $-\infty \sim \infty$  的连续区间内取任何值。

2. 傅里叶频谱是  $\Omega$  的周期函数,周期为  $2\pi$

由式(7.31)可得

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\Omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} e^{-j2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

可见,频谱  $X(\Omega)$  是  $\Omega$  的一个连续周期函数,周期为  $2\pi$ 。值得注意的是为了合成  $x(n)$ ,需要用到的是起始于  $\Omega$  任意值且仅在  $2\pi$  频率区间内的频谱。为了方便常将这个区间选为  $(-\pi, \pi)$ ,称为基本频率范围。

造成离散时间信号频谱  $X(\Omega)$  的周期性原因是由于在频率上相差  $2\pi$  整数倍的全部离散时间信号都是相同的。

3.  $X(\Omega)$  的共轭对称性

由式(7.31),  $x^*(n)$  的 DTFT 是

$$\text{DTFT}\{x^*(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{-j\Omega n} = X^*(-\Omega)$$

即

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(-\Omega) \quad (7.32)$$

对于实信号  $x(n)$ ,有  $x(n) = x^*(n)$ ,这意味着有  $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ ,即  $X(\Omega)$  和  $X(-\Omega)$  是共轭对称的。实信号  $x(n)$  的频谱  $X(\Omega)$  一般是复函数,又可写成

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| e^{j\angle X(\Omega)}$$

由于  $X(\Omega)$  的共轭对称性,对实信号  $x(n)$  可得

$$\begin{aligned} |X(\Omega)| &= |X(-\Omega)| \\ \angle X(\Omega) &= -\angle X(-\Omega) \end{aligned}$$

可见对于实信号  $x(n)$ ,幅度谱  $|X(\Omega)|$  是  $\Omega$  的偶函数,相位谱  $\angle X(\Omega)$  是  $\Omega$  的奇函数。

4. DTFT 的存在条件

由于  $|e^{-j\Omega n}| = 1$ ,根据式(7.31)可得,若  $x(n)$  是绝对可和的,也即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (7.33)$$

可以保证  $X(\Omega)$  存在。这表明信号  $x(n)$  绝对可和是 DTFT 存在的一个充分条件。另外,若引入奇异函数  $\delta(\Omega)$ ,对某些不满足式(7.33)条件的信号也能求得 DTFT,如表 7.1 所示的序号为 9 和 10 的变换对,对全部  $n$  均为 1 和  $x(n) = e^{j\Omega_0 n}$  的 DTFT 都存在,但它们均不满足式(7.33)。

表 7.1 常用离散信号傅里叶变换表

序号	离散信号 $x(n)$	频谱 $X(\Omega)$	备注
1	$\delta(n)$	1	
2	$\delta(n-r)$	$e^{-jr\Omega}$	
3	$u(n)$	$\frac{1}{1-e^{j\Omega}} + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-2\pi l)$	
4	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$	$ a  < 1$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$	$ a  > 1$
6	$a^{ n }$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$	$ a  < 1$
7	$na^n u(n)$	$\frac{ae^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2} = \frac{ae^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-a)^2}$	$ a  < 1$
8	$\frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}(\Omega_c n)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} G_{2P_c}(\Omega-2\pi l)$	
9	1	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-2\pi l)$	
10	$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)$	
11	$\cos\Omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l) + \delta(\Omega+\Omega_0-2\pi l)]$	

【例 7.2.1】求  $x(n) = a^n u(n)$  的 DTFT。

解:由式(7.31)得

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n$$

这是一个公比为  $ae^{-j\Omega}$  的无穷几何级数,因此只要  $|ae^{-j\Omega}| < 1$  就有

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

因为  $|e^{-j\Omega}| < 1$ ,这就意味着若  $|a| > 1$ ,  $X(\Omega)$  不收敛,即不存在 DTFT。若  $|a| < 1$ ,有

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \quad |a| < 1$$

即

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-a\cos\Omega + ja\sin\Omega}$$

所以有  $|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\Omega)^2 + (a\sin\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}}$

$$\angle X(\Omega) = -\arctg \frac{a\sin\Omega}{1 - a\cos\Omega}$$

图 7.4 所示为当  $a = 0.8$  时, 指数信号  $x(n) = a^n u(n)$  及其频谱的图。从图上可以看到, 频谱是  $\Omega$  的连续且周期为  $2\pi$  的周期函数。幅度谱  $|X(\Omega)|$  和相位谱  $\angle X(\Omega)$  分别是  $\Omega$  的偶函数和奇函数。

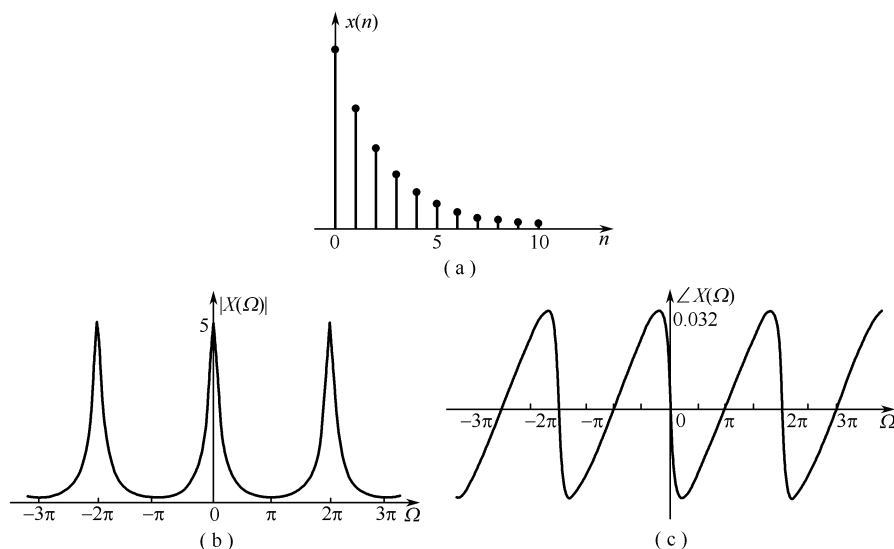


图 7.4 指数信号  $a^n u(n)$  及其傅里叶频谱

【例 7.2.2】求图 7.5 所示  $x(n) = a^n u(-n-1)$  的 DTFT。

解: 由式(7.31)得

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) e^{-j\Omega n} \quad \text{令 } n = -m, \text{ 有}$$

$$X(\Omega) = \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^m$$

这是一个公比为  $ae^{-j\Omega}$  的无穷几何级数, 若  $|a| < 1$ ,

$X(\Omega)$  不收敛, 即不存在 DTFT。若  $|a| > 1$ , 有

$$X(\Omega) = \frac{1}{ae^{-j\Omega} - 1} \quad |a| > 1$$

即

$$X(\Omega) = \frac{1}{a\cos\Omega - 1 - ja\sin\Omega}$$

所以有  $|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\Omega)^2 + (a\sin\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}}$

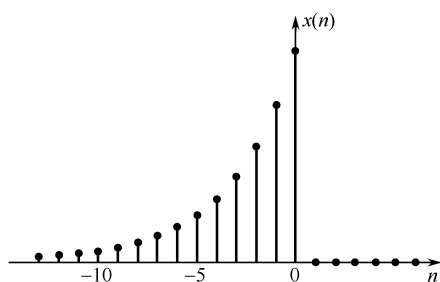


图 7.5 指数信号  $a^n u(-n-1)$

$$\angle X(\Omega) = \arctan \frac{a \sin \Omega}{a \cos \Omega - 1}$$

值得注意的是除去一个相反的符号外,这个傅里叶变换与  $x(n) = a^n u(n)$  的是一样的。不过,在确定  $X(\Omega) = 1/(ae^{-j\Omega} - 1)$  的 IDTFT 时,应根据  $a$  值的取值范围来确定。若  $|a| < 1$ ,那么反变换是  $x(n) = a^n u(n)$ ;若  $|a| > 1$ ,那么反变换是  $x(n) = a^n u(-n-1)$ 。

**【例 7.2.3】** 求图 7.6(a) 所示离散时间矩形脉冲的 DTFT,这个脉冲也称为 9 点的矩形窗函数。

**解:** 由式(7.31)得

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} (e^{-j\Omega})^n$$

这是一个公比为  $e^{-j\Omega}$  的无穷几何级数,由等比求和公式得

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{e^{j\Omega(N-1)/2} - e^{-j\Omega(N+1)/2}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega N/2} - e^{-j\Omega N/2})}{e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})} \\ &= \frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} = \frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)} \quad (N=9) \end{aligned}$$

图 7.6(b) 是  $N=9$  的频谱  $X(\Omega)$ 。

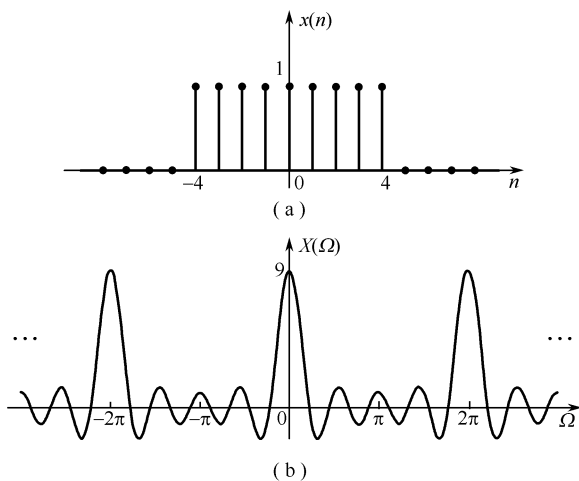


图 7.6 离散时间矩形脉冲及其傅里叶频谱

**【例 7.2.4】** 求在基本频带 ( $|\Omega| < \pi$ ) 内描述的矩形脉冲频谱  $X(\Omega) = G_{2\Omega_c}(\Omega)$ ,  $\Omega_c \leq \pi$  的 IDTFT。由于周期性质,  $X(\Omega)$  以  $2\pi$  间隔重复,如图 7.7(a) 所示。

**解:** 由式(7.30)得

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{j2\pi n} e^{j\Omega n} \Big|_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}(\Omega_c n) = \frac{1}{4} \text{Sa}\left(\frac{1}{4}\pi n\right) \end{aligned}$$

信号  $x(n)$  如图 7.7(b) 所示。

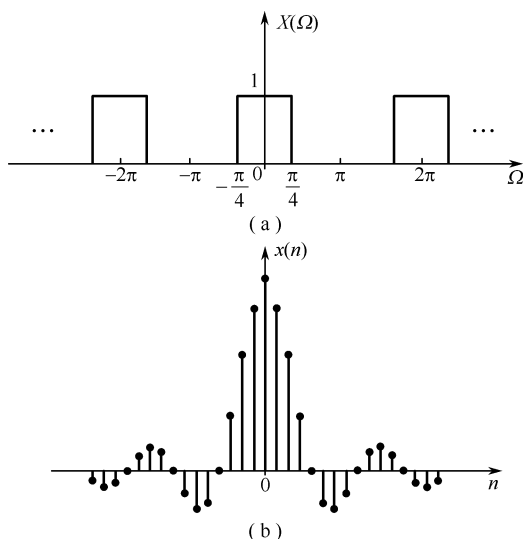


图 7.7 一个周期门脉冲频谱的离散时间傅里叶反变换

### 7.2.3 离散时间傅里叶变换性质

离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶变换一样,也具有很多重要的性质,同样可以简化一个信号正变换和反变换的求解。我们将会看到,这些性质与连续时间情况下相比有很多相似之处,但是也有若干明显的差别。

#### 1. 线性

若  $x_1(n) \leftrightarrow X_1(\Omega)$ ,  $x_2(n) \leftrightarrow X_2(\Omega)$ , 则

$$ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega) \quad (7.34)$$

这个性质很容易用傅里叶变换定义证明。这个结果可以推广到任意有限项的和。

#### 2. 时频倒置

若  $x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$ , 则

$$x(-n) \leftrightarrow X(-\Omega) \quad (7.35)$$

证明:由式(7.31),  $x(-n)$  的 DTFT 是

$$x(-n) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j(-\Omega)m} = X(-\Omega)$$

**【例 7.2.5】** 利用时频倒置性质和表 7.1 中序号为 4 的变换对导出表 7.1 中序号为 6 的变换对。

解:表 7.1 中序号为 4 的变换对是

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, \quad |a| < 1$$

由时频倒置性质得:

$$a^{-n}u(-n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}}, |a| < 1$$

又因为  $a^{|n|}$  能表示为  $a^n u(n)$  和  $a^{-n} u(-n)$  之和,但在  $n=0$  时的值算了两次,所以

$$a^{|n|} = a^n u(n) + a^{-n} u(-n) - \delta(n)$$

因此,利用线性性有

$$a^{|n|} \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} - 1 = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}, |a| < 1$$

### 3. 时移性质

若  $x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$ , 则

$$x(n-m) \leftrightarrow X(\Omega)e^{-j\Omega m}, m \text{ 为整数} \quad (7.36)$$

证明:由式(7.31)得

$$\begin{aligned} x(n-m) &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)e^{-j\Omega n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\Omega(l+m)} \\ &= e^{-j\Omega m} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\Omega l} = X(\Omega)e^{-j\Omega m} \end{aligned}$$

这个结果表明,经一个信号延迟  $m$  个样本不改变它的幅度谱,只是相位谱改变  $-m\Omega$ 。这个添加的相位是  $\Omega$  的线性函数,斜率为  $-m$ 。

**【例 7.2.6】** 求图 7.8 所示信号  $x(n) = \frac{1}{4}\text{Sa}\left[\frac{\pi}{4}(n-2)\right]$  的 DTFT。

解:在例 7.2.4 已求得

$$\frac{1}{4}\text{Sa}\left(\frac{\pi}{4}n\right) \leftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_{\pi/2}(\Omega - 2\pi l)$$

利用时移性质有

$$\frac{1}{4}\text{Sa}\left[\frac{\pi}{4}(n-2)\right] \leftrightarrow \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_{\pi/2}(\Omega - 2\pi l)e^{-j2\Omega}$$

该信号的频谱如图 7.8(b) 所示。

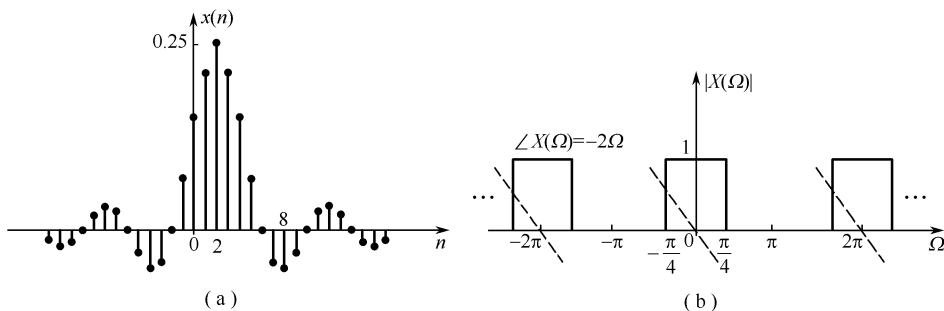


图 7.8 信号  $x(n) = \frac{1}{4}\text{Sa}\left[\frac{\pi}{4}(n-2)\right]$  及其频谱

## 4. 频移性质

若  $x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$ , 则

$$x(n)e^{j\Omega_c n} \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_c) \quad (7.37)$$

证明: 由式(7.31)得

$$x(n)e^{j\Omega_c n} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\Omega_c n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\Omega - \Omega_c)n} = X(\Omega - \Omega_c)$$

由频移性质可得

$$x(n)\cos(\Omega_c n) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\Omega - \Omega_c) + X(\Omega + \Omega_c)] \quad (7.38)$$

这就是调制性质。

**【例 7.2.7】** 用信号  $x(n) = \text{Sa}(\pi n/4)$  调制载波  $\cos\pi n/2$ , 求出并画出已调制信号  $x(n)\cos(\pi n/2)$  的频谱。

解: 利用表 7.1 中序号为 8 的变换对可求得  $x(n) = \text{Sa}(\pi n/4)$  的 DTFT 为

$$X(\Omega) = 4 \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_{\pi/2}(\Omega - 2\pi l)$$

图 7.9(a) 所示为  $x(n)$  的频谱  $X(\Omega)$ 。根据频移性质式(7.38)可得

$$x(n)\cos(\pi n/2) \leftrightarrow 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} [G_{\pi/2}(\Omega - 0.5\pi - 2\pi l) + G_{\pi/2}(\Omega + 0.5\pi - 2\pi l)]$$

图 7.9(b) 所示为频移  $\pi/2$  的一部分  $X(\Omega)$ , 而图 7.9(c) 所示为频移  $-\pi/2$  的另一部分  $X(\Omega)$ , 将这两个频移后的频谱相加, 再除以 2 就得到已调制的频谱, 如图 7.9(d) 所示。

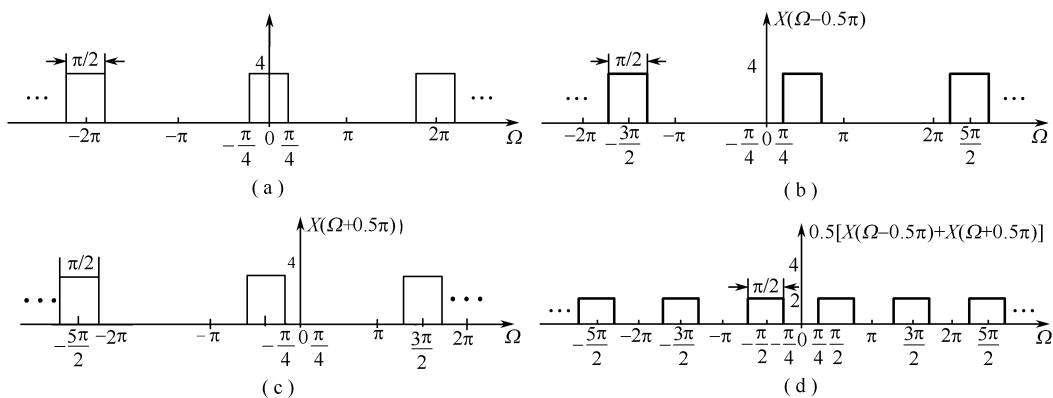


图 7.9 例 7.2.7 调制的实例

## 5. 频域微分

若  $x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$ , 则

$$nx(n) \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \quad (7.39)$$

将式两边对  $\Omega$  微分立即可以得出这个结果。

【例 7.2.8】 利用频域微分性质和表 7.1 的变换对 4 导出表 7.1 的变换对 7。

解:表 7.1 的变换对 4 是

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |a| < 1$$

由频域微分性质得:

$$na^n u(n) \leftrightarrow j \frac{d}{d\Omega} \left[ \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \right] = \frac{ae^{-j\Omega}}{(1 - ae^{-j\Omega})^2} = \frac{ae^{j\Omega}}{(e^{j\Omega} - a)^2} \quad |a| < 1$$

## 6. 时域卷积

若  $x_1(n) \leftrightarrow X_1(\Omega)$ ,  $x_2(n) \leftrightarrow X_2(\Omega)$  则

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega) \quad (7.40)$$

【例 7.2.9】 若  $x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$ , 试证明

$$\sum_{m=-\infty}^n x(m) \leftrightarrow \pi X(0) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l) + \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} X(\Omega)$$

证明:因  $x(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) u(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$

由表 7.1 中序号为 3 的变换对知

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$$

因此,根据时域卷积性质,可得

$$\sum_{m=-\infty}^n x(m) \leftrightarrow X(\Omega) \left[ \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l) \right]$$

由于  $X(\Omega)$  是以  $2\pi$  为周期的,即  $X(0) = X(2\pi l)$ ,再者  $X(\Omega) \delta(\Omega - 2\pi l) = X(2\pi l) \delta(\Omega - 2\pi l) = X(0) \delta(\Omega - 2\pi l)$ ,所以得到

$$\sum_{m=-\infty}^n x(m) \leftrightarrow \pi X(0) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l) + \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} X(\Omega)$$

## 7. 帕塞瓦尔定理

若  $x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$ , 则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad (7.41)$$

这个关系类似于连续时间情况下的帕塞瓦尔定理。同样式(7.41)的左边表示信号  $x(n)$  在时域中的能量,而右边表示其在频域中的能量,而  $|X(\Omega)|^2$  称为能量谱密度。

表 7.2 DTFT 性质

名称	时域 $x(n)$	频域 $X(\Omega)$
线性	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
共轭	$x^*(n)$	$X^*(-\Omega)$
时频倒置	$x(-n)$	$X(-\Omega)$



(续表)

名称	时域 $x(n)$	频域 $X(\Omega)$
时移特性	$x(n-m)$	$X(\Omega)e^{-j\Omega m}$
频移特性	$x(n)e^{j\Omega_c n}$	$X(\Omega-\Omega_c)$
频域微分	$nx(n)$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
时域卷积	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega)$
频域卷积	$x_1(n) \cdot x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$
帕塞瓦尔等式	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(\Omega) ^2 d\Omega$	

【例 7.2.10】求信号  $x(n) = Sa(\Omega_c n)$  的能量,假定  $\Omega_c < \pi$ 。

解:由表 7.1 中序号为 8 的变换对知,  $x(n)$  在基本频率范围内其频谱为

$$Sa(\Omega_c n) \leftrightarrow \frac{\pi}{\Omega_c} G_{2\Omega_c}(\Omega) \quad |\Omega| \leq \pi$$

因此根据帕塞瓦尔定理有

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{\Omega_c}\right)^2 G_{2\Omega_c}^2(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{\Omega_c}\right)^2 \cdot 2\Omega_c = \frac{\pi}{\Omega_c}$$

## 7.3 几种傅里叶变换的关系

所谓傅里叶变换就是在以时间为自变量的“信号”及频率为自变量的“频谱”函数之间的某种变换关系。从前面的分析我们已经看到,傅里叶变换的离散性和周期性在时域与频域中表现出巧妙的对称关系,即当自变量“时间”或“频率”取连续形式和离散形式的不同组合,就可以形成各种不同的傅里叶变换对。具体说,这就是:呈周期性的连续时间函数,其傅里叶变换为离散的非周期频率函数(傅里叶级数,离散频谱);而非周期性的离散时间函数,其傅里叶变换为连续的周期性函数(抽样信号的频谱呈周期性)。下面针对可能出现的四种类型的时域和频域组合进行讨论。此节着重说明各种组合的不同特点,并非对某一变换对作精确的描述。

### 7.3.1 连续时间傅里叶变换(CTFT)

这就是我们熟悉的非周期连续时间信号求频谱的情况,在第 3 章我们曾详细研究。

连续时间信号  $x(t)$  的傅里叶变换  $X(j\omega)$  可以表示为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.42)$$

及变换可表示为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.43)$$

这种时间函数及其频谱函数的形式如图 7.10(a) 所示。我们看到这里的  $x(t)$  和  $X(j\omega)$  都是连续的,也都是非周期的。

### 7.3.2 连续时间傅里叶级数(CTFS)

当连续时间信号为周期函数时,其傅里叶变换具有离散特性,呈现为冲激序列。在这种情况下,表示信号频谱的另一种方法是写为傅里叶级数的形式。令  $x(t)$  代表一周期为  $T$  的周期性连续时间函数,傅里叶级数的系数写为  $X_k$ 。这组变换对是

$$X_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (7.44)$$

和

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad (7.45)$$

两函数的特性如图 7.10(b) 所示,可见周期性的连续时间函数对应于非周期性的离散频谱。

### 7.3.3 离散时间傅里叶变换(DTFT)

如果我们将非周期性的连续时间信号  $x(t)$ ,进行等间隔抽样就得到非周期性的离散时间函数  $x(n)$ ,那么,它的傅里叶变换式就是周期性的连续函数,写作  $X(\Omega)$ ,如图 7.10(c) 所示。这种情况我们曾在 7.2 节中详细讨论过。

这组变换对是

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad (7.46)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (7.47)$$

此种情况与 7.3.2 节情况呈对称关系,这就是:非周期的离散时间函数对应于周期性的连续频率变换函数。

### 7.3.4 离散时间傅里叶级数(DTFS)

一连续的非周期信号  $x(t)$ ,在时域中抽样,结果得到频域的周期性函数,如果我们在频域中抽样,则又得到时域的周期性,这样就得到周期性的离散时间信号与周期性离散频率间的变换对,即我们在 7.1 节中曾详细讨论过的离散时间傅里叶级数:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\Omega_0 n} \quad (7.48)$$

和

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (7.49)$$

它们是图 7.10(d) 所示函数图形的数学描述。

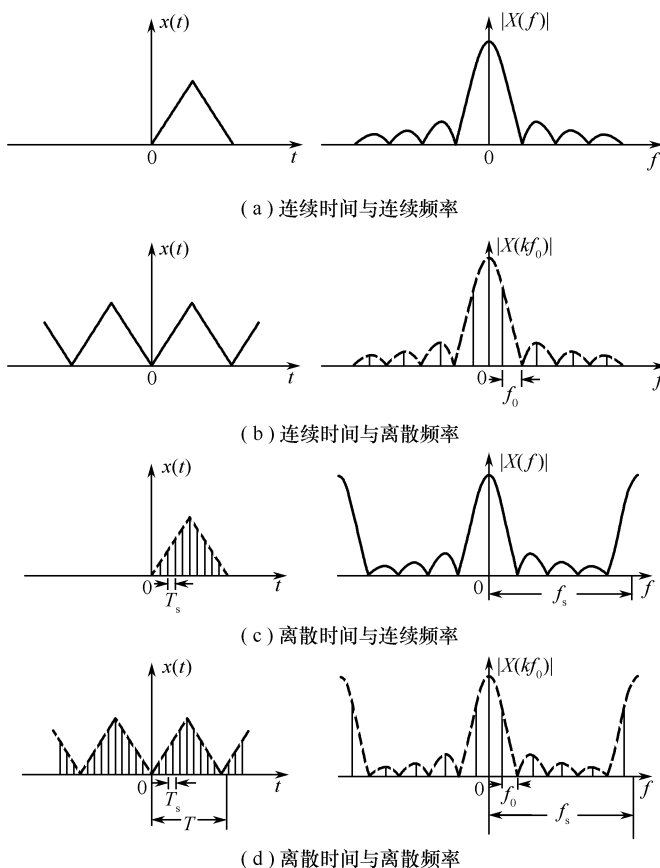


图 7.10 傅里叶变换的各种形式

## 7.4 离散时间线性时不变系统的频域分析

### 7.4.1 系统响应的频域表示

现考虑一个离散时间(线性时不变简记DLTI)系统,其单位样值响应为 $h(n)$ ,要求系统对输入 $x(n)$ 的零状态响应 $y_{zs}(n)$ 。有 $y_{zs}(n) = x(n) * h(n)$ 。令

$$x(n) \leftrightarrow X(\Omega), h(n) \leftrightarrow H(\Omega), y(n) \leftrightarrow Y(\Omega)$$

根据离散时间傅里叶变换的卷积性质,有

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega) \quad (7.50)$$

其中 $H(\Omega)$ 称为系统的频率响应。且

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\Omega n} \quad (7.51)$$

一般 $H(\Omega)$ 是复数,可以用幅度和相位表示为 $H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)}$ ,其中 $|H(\Omega)|$ 称

为系统的幅频特性,  $\angle H(\Omega)$  称为系统的相频特性。同连续时间系统频率响应的地位与作用相类似, 它表示输出序列的幅度和相位相对于输入序列的变化, 即输出幅度谱是输入幅度谱和系统幅频特性的乘积, 而输出相位谱是输入相位谱和系统相频特性的和。离散时间系统的幅频特性也是频率的偶函数, 相频特性也是频率的奇函数。但与连续时间系统频率响应  $H(j\omega)$  显著不同的是,  $H(\Omega)$  是  $\Omega$  的周期函数, 且周期为  $2\pi$ 。

### 7.4.2 系统频率响应和单位样值响应的计算

对于一个线性时不变系统, 其输出  $y(n)$  和输入  $x(n)$  之间满足如下形式的线性常系数差分方程

$$\sum_{i=0}^k a_i y(n-i) = \sum_{r=0}^m b_r x(n-r)$$

对上式两边进行傅里叶变换, 并应用傅里叶变换的线性和时移性质, 就可得到如下表示式

$$\sum_{i=0}^k a_i e^{-j\Omega i} Y(\Omega) = \sum_{r=0}^m b_r e^{-j\Omega r} X(\Omega) \quad (7.52)$$

或者, 等效为

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{r=0}^m b_r e^{-j\Omega r}}{\sum_{i=0}^k a_i e^{-j\Omega i}} \quad (7.53)$$

从式(7.53)可看到, 和连续时间情况一样,  $H(\Omega)$  是两个多项式之比, 但是在此情况下它们是以  $e^{-j\Omega}$  为变量的多项式。同样分子多项式的系数就是式(7.52)右边的系数, 而分母多项式的系数就是式(7.52)左边的系数。因此, 根据式(7.52)就可直接确定出系统的频率响应。

**【例 7.4.1】** 有一线性时不变系统, 初始状态为 0, 且由下列差分方程表征:

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = 2x(n)$$

试求其系统频率响应和单位样值响应

**解:** 根据式(7.53), 该系统的频率响应为

$$H(\Omega) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$$

为了确定相应的单位样值响应, 就要求  $H(\Omega)$  的反变换。和连续时间情况一样, 有效的方法是利用部分分式展开法, 即

$$H(\Omega) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

其中每一项的反变换都能直接求出来, 其结果为

$$h(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

上例中所采用的求解步骤与连续时间情况在形式上是一样的。尤其是在  $H(\Omega)$  展开成部

分分式以后,其每一项的反变换都能直接写出来。因此,这种方法可用来求取任何一个由线性常系数差分方程所表征的线性时不变系统的频率响应。同样,若已知系统的输入序列的傅里叶变换  $X(\Omega)$  和系统的单位样值响应  $h(n)$ ,可以用频域分析法求系统对  $x(n)$  的响应  $y_{zs}(n)$ 。

**【例 7.4.2】** 已知一离散 LTI 系统的单位样值响应为  $h(n) = (0.5)^n u(n)$ , 输入信号为  $x(n) = (0.8)^n u(n)$ , 试求零状态响应  $y_{zs}(n)$ 。

**解:** 由表 7.1 中序号为 4 的变换对得

$$x(n) = (0.8)^n u(n) \leftrightarrow X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\Omega}}$$

$$h(n) = (0.5)^n u(n) \leftrightarrow H(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

又因为

$$y_{zs}(n) = x(n) * h(n)$$

根据时域卷积性质有

$$\begin{aligned} Y_{zs}(\Omega) &= X(\Omega) \cdot H(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\Omega}} \cdot \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} \\ &= \frac{8/3}{1 - 0.8e^{-j\Omega}} - \frac{5/3}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

求上式 IDTFT, 有

$$y_{zs}(n) = \left[ \frac{8}{3}(0.8)^n - \frac{5}{3}(0.5)^n \right] u(n)$$

在离散时间线性时不变系统中,频率响应  $H(\Omega)$  所起的作用与连续时间线性时不变系统中的  $H(j\omega)$  是一样的。同样两个系统级联后的频率响应就是两者频率响应的乘积。也如同连续时间系统一样,不是每一个离散时间线性时不变系统都有一个频率响应特性,例如单位样值响应  $h(n) = 2^n u(n)$  的线性时不变系统对正弦输入就没有一个有限的响应,这是因为  $h(n)$  的傅里叶变换不收敛,即不满足绝对可和的条件。

如果一个线性时不变系统是稳定的,那么它的单位脉冲响应就是绝对可和的,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (7.54)$$

也就保证了  $h(n)$  的傅里叶变换的收敛。因此一个稳定的线性时不变系统就一定存在频率响应。

### 7.4.3 滤波特性

与连续系统的滤波特性一样,离散系统的滤波特性也有低通、带通、高通、带阻、全通之分,由于频响特性  $H(\Omega)$  的周期性,因此,这些特性只能限于在  $-\pi \leq \Omega \leq \pi$  范围内来区分,图 7.11 给出了理想低通、带通、高通、带阻、全通滤波器的频率响应的幅频特性。

图 7.11(a) 给出了理想低通滤波器的幅频特性。这就是说,对于  $-\pi < \Omega < \pi$ , 有

$$|H(\Omega)| = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

因为  $H(\Omega)$  是周期性的,所以上式规定了对于所有  $\Omega$  的频率响应。这样一个系统把输入信号频

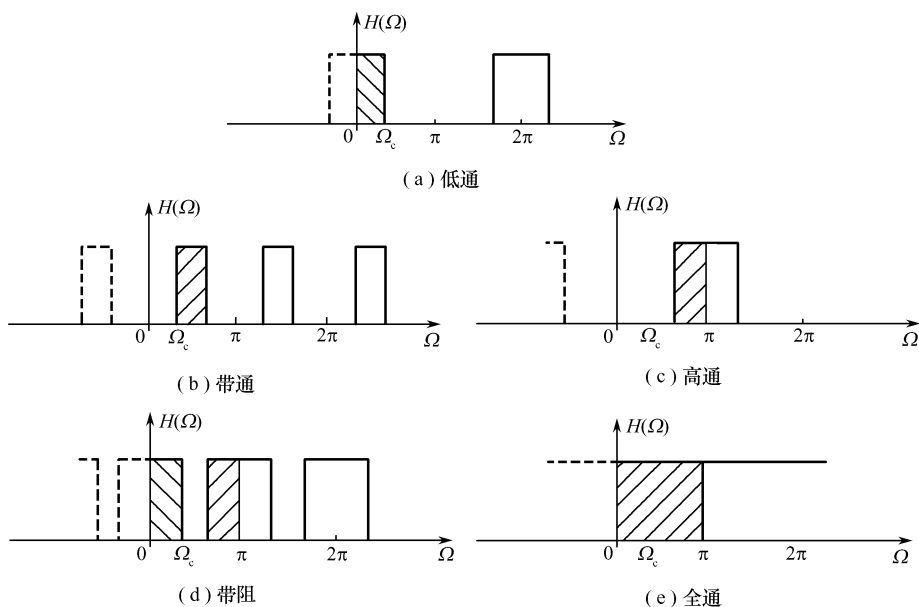
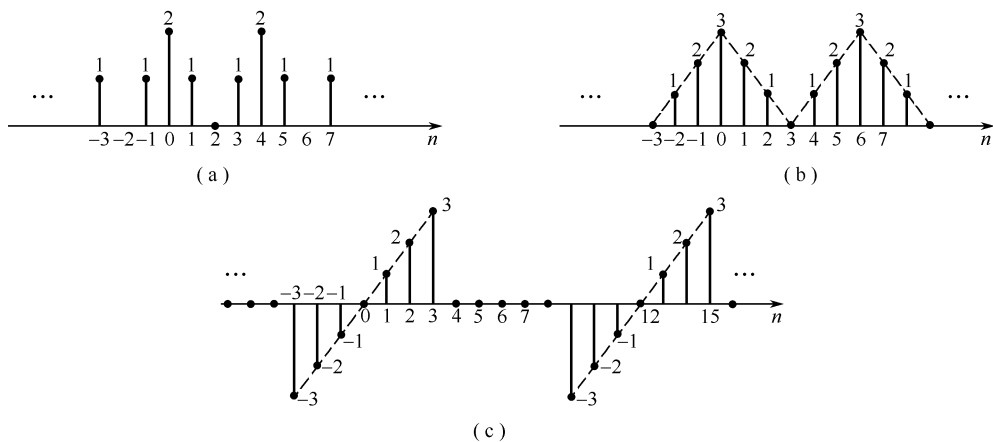


图 7.11 理想低通,带通,高通,带阻,全通数字滤波器的幅频特性

率在  $\Omega_c < |\Omega| \leq \pi$  范围内所有的分量全部滤掉。显然,理想低通滤波器不是因果性的,但是它在概念上极其重要。同样,可用实际的系统来逼近理想滤波器特性。

## 习 题 七

7.1-1 题 7.1-1 图所示为周期序列  $x(n]$ , 求其离散时间傅里叶级数  $X_k$  和相应的幅度谱及相位谱。



题 7.1-1 图

7.1-2 试求下面周期信号的离散时间傅里叶级数,并对  $0 \leq k \leq N-1$  画出它的幅度谱和相位谱。

$$(1) x(n) = 4\cos 2.4\pi n + 2\sin 3.2\pi n \quad (2) x(n) = 2\cos 3.2\pi(n-3)$$

7.1-3 试证明对于实周期序列,离散傅里叶级数的下列对称特性成立。

$$(1) X_k = X_{-k}^* \quad (2) \operatorname{Re}(X_k) = \operatorname{Re}(X_{-k})$$

$$(3) \operatorname{Im}(X_k) = -\operatorname{Im}(X_{-k}) \quad (4) |X_k| = |X_{-k}|$$

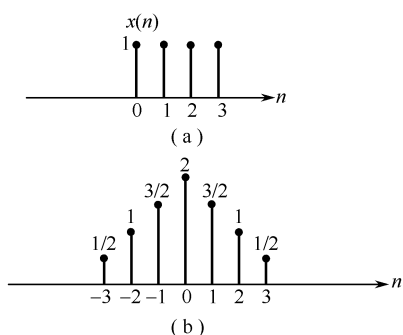
$$(5) \angle X_k = -\angle X_{-k}$$

7.1-4 若是周期为  $N$  的周期序列,那么它也是周期为  $2N$  的周期序列,令  $X_k$  表示周期为  $N$  时的离散时间傅里叶级数系数,  $Y_k$  表示周期为  $2N$  时的离散时间傅里叶级数系数,试以  $X_k$  表示  $Y_k$ 。

7.2-1 直接利用定义式(7.31)求下列信号的 DTFT,假设  $|a| < 1$

$$(1) \delta(n) \quad (2) \delta(n-m) \quad (3) a^n u(n-1)$$

$$(4) a^n u(n+1) \quad (5) (-a)^n u(n) \quad (6) a^{|n|}$$



题 7.2-2 图

7.2-2 计算下列每个信号的 DTFT。

(1)  $x(n)$  如题 7.2-2(a) 图所示。

(2)  $x(n)$  如题 7.2-2(b) 图所示。

$$(3) 2^n u(-n)$$

$$(4) \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+2)$$

$$(5) \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n+3) - u(n-2)]$$

$$(6) \delta(4-2n)$$

7.2-3 利用 DTFT 性质求下列信号的 DTFT,假设

$$|a| < 1$$

$$(1) u(n) - u(n-9) \quad (2) a^{n-m} u(n-m) \quad (3) a^{n-3} [u(n) - u(n-10)]$$

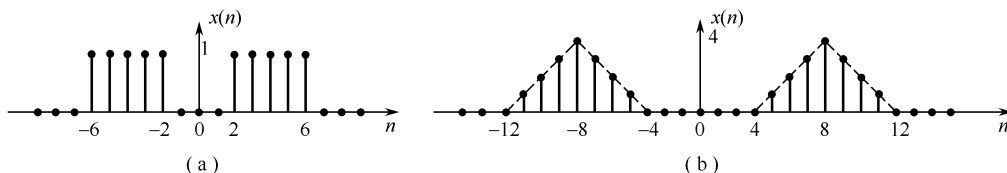
$$(4) a^{n-m} u(n) \quad (5) a^n u(n-m) \quad (6) (n-m) a^{n-m} u(n-m)$$

$$(7) (n-m) a^n u(n) \quad (8) n a^{n-m} u(n-m)$$

7.2-4 利用时移性质证明

$$x(n+m) + x(n-m) \leftrightarrow 2X(\Omega) \cos m\Omega$$

利用这个结论求题 7.2-4 图所示信号的 DTFT。



题 7.2-4 图

7.2-5 下列各频谱函数仅对区间  $|\Omega| \leq \pi$  给出,并假设  $\Omega_c$  和  $\Omega_0 < \pi$ ,试利用式(7.30)求 IDTFT。

$$(1) e^{j\Omega k} \quad (2) \cos k\Omega \quad (3) \cos^2(\Omega/2)$$

$$(4) \Lambda_{2\Omega_c}(\Omega) \quad (5) 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (6) \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$

7.2-6 下列是一些离散时间信号的傅里叶变换。确定与每个变换相对应的信号。

$$(1) X(\Omega) = 1 - 2e^{-j3\Omega} + 4e^{j2\Omega} + 3e^{-j6\Omega}$$

$$(2) X(\Omega) = \cos^2 \Omega$$

$$(3) X(\Omega) = \cos(\Omega/2) + j\sin\Omega \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$

7.2-7 试利用表 7.1 中变换对 4 和卷积性质, 求  $X(\Omega) = \frac{e^{j2\Omega}}{(e^{j\Omega} - a)^2}$  的 IDTFT。

7.2-8 下面所列信号

(a)  $x(n]$  如题 7.2-8(a) 图所示; (b)  $x(n]$  如题 7.2-8(b) 图所示;

$$(c) x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n); \quad (d) x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|};$$

$$(e) x(n) = \delta(n-1) + \delta(n+2); \quad (f) x(n) = \delta(n-1) + \delta(n+3);$$

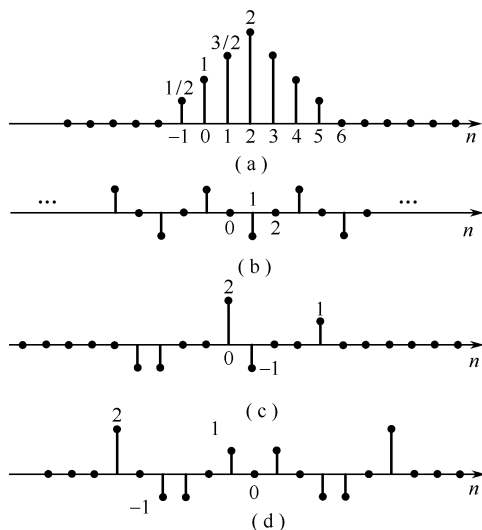
(g)  $x(n]$  如题 7.2-8(c) 图所示; (h)  $x(n]$  如题 7.2-8(d) 图所示;

$$(i) x(n) = \delta(n-1) - \delta(n+1);$$

如果有傅里叶变换的话, 确定其中哪些信号的傅里叶变换满足下列条件之一:

$$(1) \operatorname{Re}[X(\Omega)] = 0 \quad (2) \operatorname{Im}[X(\Omega)] = 0 \quad (3) \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = 0$$

$$(4) X(\Omega) \text{ 是周期的} \quad (5) X(0) = 0$$



题 7.2-8 图

7.4-1 由下列差分方程描述的因果线性时不变系统:

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

(1) 确定该系统的频率响应  $H(\Omega)$ 。

(2) 该系统对下列输入的响应是什么?

$$(a) x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad (b) x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(c) x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) \quad (d) x(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

(3) 对具有下列傅里叶变换的输入, 求该系统的响应。

$$(a) X(\Omega) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad (b) X(\Omega) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$



$$(c) X(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} \quad (d) X(\Omega) = 1 + 2e^{-j3\Omega}$$

7.4-2 一个离散时间线性不变系统的单位样值响应为

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

利用傅里叶变换求该系统对下列每个输入信号的响应。

$$(1) x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

$$(2) x(n) = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$(3) x(n) = (-1)^n$$

7.4-3 设  $x(n]$  和  $h(n]$  是具有下列傅里叶变换的信号:

$$X(\Omega) = 3e^{j\Omega} + 1 - e^{-j\Omega} + 2e^{j3\Omega}$$

$$H(\Omega) = -e^{j\Omega} + 2e^{j2\Omega} + e^{j4\Omega}$$

求

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

7.4-4 若一离散线性时不变系统,其输入

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

则输出为

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

(1) 求出该系统的单位样值响应和系统频率响应。

(2) 求出联系  $x(n]$  和  $y(n]$  表征该系统的差分方程。

7.4-5 (1) 若  $x(n] \leftrightarrow X(\Omega)$ , 证明:  $(-1)^n x(n] \leftrightarrow X(\Omega - \pi)$ ;

(2) 对  $a = 0.8$  画出  $a^n u(n]$  和  $(-a)^n u(n]$  的时域波形, 根据图 7.4  $a^n u(n]$  的频谱画出  $(-a)^n u(n]$  的频谱;

(3) 一截止频率为  $\Omega_c$  的理想低通滤波器, 其频率响应为  $H(\Omega) = G_{2\Omega_c}(\Omega)$ , 求它的单位样值响应  $h(n]$ 。求一个单位样值响应为  $(-1)^n h(n]$  的滤波器的频率响应。画出这个滤波器的频率响应, 并判断该滤波器属于何种类型的滤波器。

## 第 8 章 离散时间 LTI 系统的 $z$ 域分析

与连续时间信号与系统类似,离散时间信号与系统的分析方法也分为时域分析方法和变换域分析方法(包括频域和复频域分析方法)。在第 7 章中我们学习了离散时间信号和系统的频域分析方法,本章中,我们来学习其复频域的分析方法—— $z$  变换。 $z$  变换与我们在第 4 章中学习的拉普拉斯变换类似,是离散时间傅里叶变换的推广。它将描述系统的差分方程变换为代数方程,而且包含了系统的初始状态,从而可以求解系统全响应。

$z$  变换的引入以及  $z$  变换所具有的性质等方面都与拉氏变换相类似,但由于连续时间和离散时间信号与系统之间的差异,使得  $z$  变换和拉氏变换也存在着一些区别。

另外,我们在学习拉氏变换时曾指出,由于通常遇到的连续时间信号和系统大都是因果信号和因果系统,所以我们着重分析了单边拉氏变换。但对于离散时间信号和系统,非因果信号和非因果系统也有一定的应用,所以本章兼顾单边  $z$  变换和双边  $z$  变换。

### 8.1 $z$ 变换

#### 8.1.1 从离散时间傅里叶变换(DTFT)到 $z$ 变换

通过第 7 章的学习,我们知道离散时间信号  $x(n)$  的傅里叶变换为

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \quad (8.1)$$

当  $x(n)$  满足绝对可和条件时,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (8.2)$$

式(8.1)才收敛。而许多常用的离散时间信号不满足这个条件,如指数增长信号  $r^n u(n)$ , ( $|r| > 1$ )。我们采用与连续时间信号同样的方法,将  $x(n)$  乘以指数信号  $r^{-n}$ ,使  $x(n)r^{-n}$  满足绝对可和条件,然后再求其傅里叶变换,即

$$\text{DTFT}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{-n}$$

引入复变量  $z$ ,令  $z = re^{j\Omega}$ ,上式变为

$$\text{DTFT}[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

记为  $X(z)$ ,即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8.3)$$

式(8.3)称为  $x(n)$  的双边  $z$  变换。简记为

$$x(n) \leftrightarrow X(z)$$

从上面的讨论可以看出,一方面, $x(n)$ 的 $z$ 变换就是 $x(n)r^{-n}$ 的离散时间傅里叶变换;另一方面,当 $x(n)$ 满足绝对可和条件时,令 $X(z)$ 中的 $|z|=1$ (即 $z=e^{j\Omega}$ )即可得到 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(\Omega)$ ,即

$$X(\Omega) = X(z) \big|_{z=e^{j\Omega}}$$

于是,离散时间傅里叶变换就是 $z$ 平面中半径为1的圆上的 $z$ 变换,如图8.1所示。在 $z$ 平面中,这个圆称为单位圆,单位圆在 $z$ 变换讨论中所起的作用类似于 $s$ 平面上的虚轴在拉氏变换讨论中的作用。

另外,观察式(8.3)不难发现, $X(z)$ 也可以看做以 $z$ 为变量的无穷幂级数。

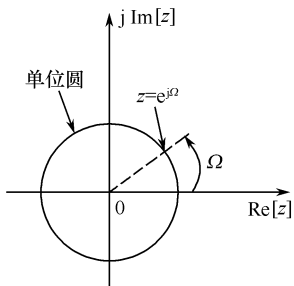


图 8.1  $z$  平面上的单位圆

### 8.1.2 收敛域

如前所述,选择合适的 $r$ 值,才能使 $x(n)r^{-n}$ 满足绝对可和条件,从而式(8.3)收敛, $X(z)$ 才存在。我们把使 $X(z)$ 存在的 $z$ 的范围(即 $z$ 的模 $r$ 的范围,因为 $e^{j\Omega}$ 不影响求和的收敛性)称为**收敛域(ROC)**。下面通过几个例子来分析 $z$ 变换的收敛问题。

#### 1. 有限长离散时间信号的 $z$ 变换收敛域

【例 8.1.1】求 $\delta(n)$ 的 $z$ 变换。

$$\text{解: } \delta(n) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$$

显然,对于所有的 $z$ , $\delta(n)$ 的 $z$ 变换都存在。称为全平面收敛。

【例 8.1.2】求如图 8.2 所示序列的 $z$ 变换。

$$\begin{aligned} \text{解: } X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= x(-3)z^3 + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + \\ &\quad x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} \\ &= z^3 + z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} \end{aligned}$$

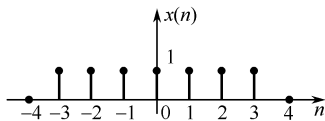


图 8.2 例 8.1.2 图

显然,除了 $z=0$ 和 $z=\infty$ 外, $X(z)$ 都存在,所以其收敛域为 $0 < |z| < +\infty$ 。也称为全平面收敛,但不包含原点和无穷远点。

对于有限长离散时间信号的收敛域,我们可以得出以下结论:

有限长离散时间信号, $z$ 变换是有限项幂级数求和,其收敛域是全平面收敛(但 $|z|=0$ 和 $|z|=\infty$ 处不一定收敛)。

进一步,如果 $x(n)$ 是因果的有限长序列,那么 $X(z)$ 是 $z$ 的有限项负幂多项式,在 $|z|=\infty$ 处收敛而 $|z|=0$ 处不收敛,故其收敛域为 $0 < |z| \leq \infty$ 。如果 $x(n)$ 是反因果的有限长序列,那么 $X(z)$ 是 $z$ 的有限项正幂多项式,在 $|z|=0$ 处收敛而在 $|z|=\infty$ 处不收敛,故收敛域为 $0 \leq |z| < \infty$ 。

2. 无限长离散时间信号的  $z$  变换收敛域

【例 8.1.3】求因果序列  $x(n) = a^n u(n)$  的  $z$  变换。

$$\text{解: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$\text{当 } |az^{-1}| < 1, \text{ 即 } |z| > |a| \text{ 时, 上式} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

否则,  $X(z)$  不存在。

得到如下变换对:

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \quad (8.4)$$

【例 8.1.4】求反因果序列  $x(n) = -a^n u(-n-1)$  的  $z$  变换。

$$\text{解: } X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1} z)^m$$

$$\text{当 } |a^{-1}z| < 1, \text{ 即 } |z| < |a| \text{ 时, 上式} = - \frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a}$$

否则,  $X(z)$  不存在。

得到如下变换对:

$$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a| \quad (8.5)$$

上两例中, 两个不同的离散时间信号具有相同的  $z$  变换, 但收敛域不同。因此, 和双边拉氏变换一样, 双边  $z$  变换必须和收敛域一起才能与时域信号  $x(n)$  一一对应。

【例 8.1.5】求双边序列  $x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$  的  $z$  变换。

解:

$$\text{令 } x_1(n) = a^n u(n), x_2(n) = b^n u(-n-1), \text{ 则 } x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

由式(8.4)得

$$X_1(z) = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

由式(8.5)得

$$X_2(z) = \frac{z}{z - b}, \quad |z| < |b|$$

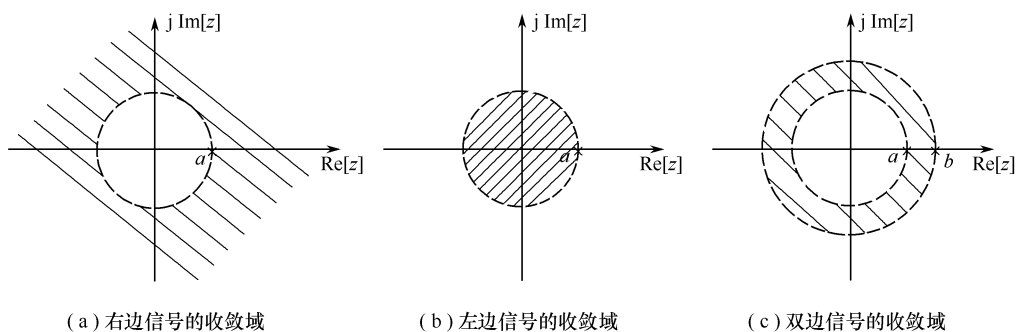
$$\text{所以, 当 } |a| < |b| \text{ 时, } X(z) = \frac{z}{z - a} - \frac{z}{z - b} = \frac{z(a - b)}{(z - a)(z - b)}, \quad |a| < |z| < |b|$$

否则,  $X(z)$  不存在。

将以上三个例子的收敛域在  $z$  平面中表示, 如图 8.3 所示。

对于无限长离散时间信号的收敛域, 我们可以得出以下结论:

- (1) 右边序列的收敛域为圆外收敛, 当为因果序列时, 收敛域包含  $|z| = \infty$ 。
- (2) 左边序列的收敛域为圆内收敛, 当为反因果序列时, 收敛域包含  $|z| = 0$ 。
- (3) 双边序列的收敛域为环状区域。

图 8.3  $z$  变换的收敛域

### 8.1.3 单边 $z$ 变换

如果式(8.3)的求和以  $n = 0$  为起点,即

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8.6)$$

称为**单边  $z$  变换**。简记为

$$x(n)u(n) \leftrightarrow X(z)$$

由以上定义可见,当  $x(n)$  是因果信号时,其单、双边  $z$  变换相等,否则二者不等。

单边  $z$  变换的收敛域只有全平面收敛和圆外收敛两种情况,而且单边  $z$  变换可以与时域信号一一对应,所以可以不标注其收敛域。

由于离散时间非因果信号和系统也有很多应用,所以双边  $z$  变换也非常重要。后面的分析中,在不导致混淆的情况下,统称它们为  $z$  变换。

### 8.1.4 $z$ 变换性质

和我们已经学习过的傅里叶变换和拉氏变换一样, $z$  变换也具有许多性质,这些性质反映了时域信号与其在  $z$  域上的变换之间的关系。掌握这些性质有助于  $x(n)$  和  $X(z)$  的互求,也有助于正确分析离散时间信号与系统。

单、双边  $z$  变换的许多性质都相同,但也有些性质,单、双边  $z$  变换有显著不同,我们会分别讨论。下面的性质,若无特殊说明,则对于单、双边  $z$  变换都适用。

#### 8.1.4.1 时移特性

由于双边  $z$  变换和单边  $z$  变换定义中求和下限不同,二者的时移特性有显著不同。下面我们分别进行讨论。

##### 1. 双边 $z$ 变换的时移特性

若  $x(n) \leftrightarrow X(z)$ ,  $r_1 < |z| < r_2$  则

$$x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0} X(z), n_0 \text{ 为整数}, r_1 < |z| < r_2 \quad (8.7)$$

证明:

$$\begin{aligned} x(n+n_0) &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+n_0) z^{-n} \xrightarrow{\text{令 } n+n_0=m} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m+n_0} \\ &= z^{n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} \\ &= z^{n_0} X(z) \end{aligned}$$

【例 8.1.6】求  $\delta(n+1)$ 、 $\delta(n-1)$  的双边  $z$  变换。

解: 因为

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

利用时移特性, 得

$$\delta(n+1) \leftrightarrow z$$

$$\delta(n-1) \leftrightarrow z^{-1}$$

以上三个  $z$  变换的收敛域分别为  $0 \leq |z| \leq \infty$ 、 $0 \leq |z| < \infty$  和  $0 < |z| < \infty$ 。这是因为, 时域移位, 可能会改变序列的因果性, 从而使得  $z$  变换的收敛情况在  $|z|=0$  和  $|z|=\infty$  处可能会发生变化。

另外, 我们在时域分析中已经看到, 如果某个系统的单位样值响应  $h(n) = \delta(n-1)$ , 那么零状态响应  $y_{zs}(n) = x(n) * h(n) = x(n-1)$ , 即系统完成单位延迟的功能。

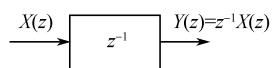


图 8.4 单位延迟器  
 $z$  域模型

单位延迟器是构成离散时间系统的基本单元之一, 其  $z$  域模型如图 8.4 所示。

## 2. 单边 $z$ 变换的时移特性

设  $m$  为大于零的整数, 我们首先来求  $x(n)$  左移序列  $x(n+m)$  的单边  $z$  变换

$$\begin{aligned} x(n+m) &\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m) z^{-n} \xrightarrow{\text{令 } n+m=k} \sum_{k=m}^{\infty} x(k) z^{m-k} \\ &= z^m \sum_{k=m}^{\infty} x(k) z^{-k} \\ &= z^m \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right] \\ &= z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right] \end{aligned}$$

得到单边  $z$  变换的时移特性如下所述。

若  $x(n) \leftrightarrow X(z)$ , 则

$$x(n+m) \leftrightarrow z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right] \quad (8.8)$$

上式表明,  $x(n)$  超前(左移)  $m$  个单位后的单边  $z$  变换, 是原来的  $z$  变换  $X(z)$  与由纵轴右边移到左边部分的  $z$  变换之差乘以  $z^m$ 。如图 8.5(b) 所示。

同理可得  $x(n)$  的右移序列  $x(n-m)$  的单边  $z$  变换

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} \right] \quad (8.9)$$

即  $x(n]$  延迟(右移) $m$  个单位后的单边  $z$  变换,是原来的  $z$  变换  $X(z)$  与由纵轴左边移到右边部分的  $z$  变换之和乘以  $z^{-m}$ 。如图 8.5(c) 所示。

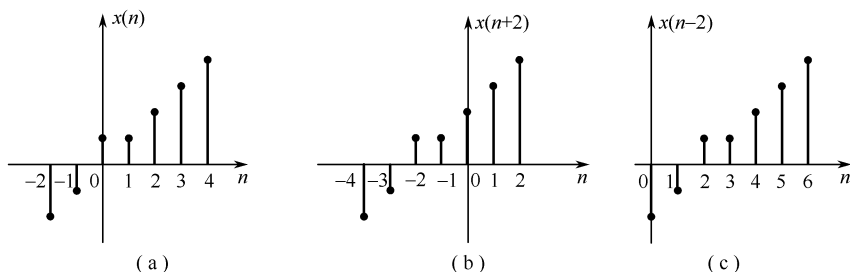


图 8.5 离散时间信号及其左移和右移两个单位后的信号

移位后序列的收敛域与原来相同,但在  $|z|=0$  和  $|z|=\infty$  处的收敛情况可能会发生变化。

观察式(8.7)、式(8.8)、式(8.9)可见,单边  $z$  变换的时移特性比双边  $z$  变换复杂,这是因为单边  $z$  变换的求和下限为  $n=0$ 。

如果  $x(n]$  是因果序列,则式(8.9)中的  $\sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}$  项等于零。于是得到因果序列右移后的单边  $z$  变换为

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}X(z) \quad (8.10)$$

经常用到的是  $m=1,2$  的情况,此时,式(8.8)、式(8.9) 写为

$$x(n-1) \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

$$x(n+1) \leftrightarrow zX(z) - zx(0)$$

$$x(n+2) \leftrightarrow z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)$$

我们已经知道,描述离散时间 LTI 系统的是常系数线性差分方程,显然我们可以利用  $z$  变换的时移特性将差分方程转换到  $z$  域。在 8.2 节中将会看到,单边  $z$  变换的时移特性在求解差分方程时特别有用。

#### 8.1.4.2 序列指数加权( $z$ 域尺度变换)

若  $x(n] \leftrightarrow X(z)$ ,  $r_1 < |z| < r_2$ ,  $a$  为常数且  $a \neq 0$ , 则

$$a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right), |a|r_1 < |z| < |a|r_2 \quad (8.11)$$

证明略。

可见时域将  $x(n]$  乘以指数序列等效于  $z$  平面尺度展缩。式(8.11) 中令  $a=-1$  得到

$$(-1)^n x(n) \leftrightarrow X(-z), r_1 < |z| < r_2$$

**【例 8.1.7】** 求下列信号的  $z$  变换。

(1)  $x(n) = \cos(\beta n)u(n)$ ; (2)  $x(n) = a^n \cos(\beta n)u(n)$ 。

解:

(1) 利用变换对 
$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

令  $a = e^{\pm j\beta}$ , 得到 
$$e^{\pm j\beta n} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{\pm j\beta}}$$

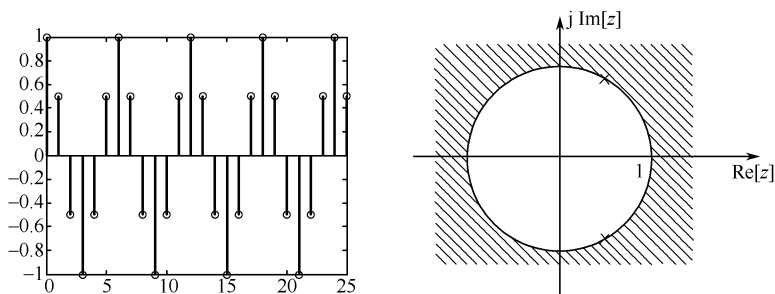
所以

$$\cos(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{z}{z - e^{j\beta}} + \frac{z}{z - e^{-j\beta}} \right] = \frac{z^2 - z \cos \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}, \quad |z| > 1 \quad (8.12)$$

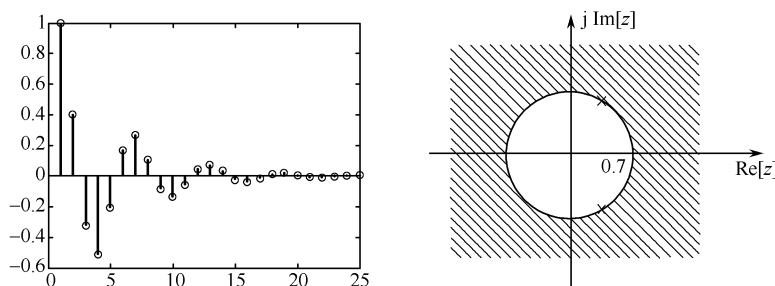
(2) 利用式(8.11)、式(8.12), 得到

$$a^n \cos(\beta n) u(n) \leftrightarrow \frac{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{z}{a} \cos \beta}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{2z}{a} \cos \beta + 1} = \frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}, \quad |z| > |a|$$

图 8.6 画出了  $\beta = \frac{\pi}{3}$  的正弦序列以及  $a = 0.7, \beta = \frac{\pi}{3}$  的衰减正弦序列的波形及收敛域。



(a)  $\cos(\frac{\pi}{3}n)u(n)$  的波形及收敛域



(b)  $(0.7)^n \cos(\frac{\pi}{3}n)u(n)$  的波形及收敛域

图 8.6 正弦序列与衰减的正弦序列及其收敛域

#### 8.1.4.3 时域翻转

若  $x(n) \leftrightarrow X(z), r_1 < |z| < r_2$ , 下面我们来求时域翻转后的序列  $x(-n)$  的双边  $z$  变换。

$$\begin{aligned} x(-n) &\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{z}\right)^{-m} \end{aligned}$$



$$= X\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

所以

$$x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1}), \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \quad (8.13)$$

显然,该性质只对双边  $z$  变换有意义。

由该性质可以看出,如果  $z_0, p_0$  分别为  $x(n)$  的  $z$  变换的零点和极点,则  $1/z_0, 1/p_0$  为  $x(-n)$  的  $z$  变换的零点和极点。

#### 8.1.4.4 卷积定理

若  $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z), r_{11} < |z| < r_{12}, x_2(n) \leftrightarrow X_2(z), r_{21} < |z| < r_{22}$ , 则

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z) \quad (8.14)$$

其收敛域至少为  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  收敛域的公共部分。

请自行证明。

该性质对于单、双边  $z$  变换均适用。但如果是单边  $z$  变换,则要求  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  均为因果信号。

#### 8.1.4.5 $z$ 域微分(序列线性加权)

根据  $z$  变换的定义式 
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

两边对  $z$  求导,得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}X(z) &= \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} [x(n)z^{-n}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(-n)x(n)z^{-n-1}] \end{aligned}$$

上式两边同乘以  $-z$ , 得

$$-z \frac{d}{dz}X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)z^{-n}]$$

所以得到  $z$  域微分特性

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz}X(z) \quad (8.15)$$

显然从单边  $z$  变换的定义式(8.6)出发也可以得到同样的结果。

**【例 8.1.8】** 求  $na^{n-1}u(n)$  的  $z$  变换。

**解:** 利用式(8.4)表示的变换对

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

利用  $z$  域微分特性,得

$$na^n u(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{z-a} \right] = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

两边同除以  $a$  得

$$na^{n-1} u(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|$$

#### 8.1.4.6 初值定理和终值定理

若因果信号  $x(n) \leftrightarrow X(z)$ , 则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) \quad (8.16)$$

上式称为初值定理。

**证明:** 对于因果信号  $x(n)$ , 由于

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

当  $z \rightarrow \infty$  时, 上式中的级数除了第一项  $x(0)$  外, 其他各项都趋近于零, 所以有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

可见, 对于因果序列  $x(n)$ , 我们可以直接由  $X(z)$  求得时域序列的初始值, 而不必求反变换。

另外, 由初值定理不难得出, 如果因果信号  $x(n)$  在  $n=0$  处取值为有限值, 则  $z \rightarrow \infty$  时  $X(z)$  一定是有限值。

若因果信号  $x(n) \leftrightarrow X(z)$ , 且  $X(z)$  除在  $z=1$  处可以有一阶极点外, 全部其他极点都在单位圆  $|z|=1$  以内, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (8.17)$$

上式称为终值定理。

**证明:** 根据单边  $z$  变换的定义

$$x(n+1) - x(n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)] z^{-n}$$

根据单边  $z$  变换的时移特性

$$x(n+1) - x(n) \leftrightarrow zX(z) - zx(0) - X(z)$$

因此有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [x(n+1) - x(n)] z^{-n} &= zX(z) - zx(0) - X(z) \\ &= (z-1)X(z) - zx(0) \end{aligned}$$

即

$$(z-1)X(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)] z^{-n} + zx(0)$$

若  $(z-1)X(z)$  的收敛域包含单位圆, 则上式两边可以取  $z \rightarrow 1$  的极限, 即

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)] z^{-n} \right\} + x(0)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)] z^{-n} \right\} + x(0) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=0}^N [x(n+1) - x(n)] \right\} + x(0) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} [x(1) - x(0) + x(2) - x(1) + \cdots + x(N) - x(N-1) + \\
&\quad x(N+1) - x(N)] + x(0) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} x(N+1)
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

应用终值定理时要特别注意条件“ $X(z)$  除在  $z=1$  处可以有一阶极点外,全部其他极点都在单位圆  $|z|=1$  以内”,在以上证明的过程中可以看出,该条件是为了保证  $(z-1)X(z)$  的收敛域包含单位圆,从而保证  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$  存在。

更多的  $z$  变换的性质如表 8.1 所示。

表 8.1  $z$  变换性质表

性质名称		
线性	$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \leftrightarrow a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	
时移特性	双边	$x(n \pm n_0) \leftrightarrow X(z) z^{\pm n_0}$
	单边	$x(n+m) \leftrightarrow z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]$ $x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k) z^{-k} \right]$
$z$ 域尺度变换	$a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right),  a  r_1 <  z  <  a  r_2$	
复频移特性	$x(n) e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(z e^{-j\Omega_0})$	
$z$ 域微分(序列线性加权)	$n x(n) \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$	
时域翻转	$x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1}), \frac{1}{r_2} <  z  < \frac{1}{r_1}$	
卷积特性	$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$	
初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
终值定理	若 $(z-1)X(z)$ 的收敛域包含单位圆,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	

利用  $z$  变换的性质,可以得到更多的  $z$  变换对,如表 8.2 所示。

表 8.2 常用  $z$  变换对

$x(n)$	$X(z)$	收敛域
$\delta(n)$	1	$0 \leq  z  \leq \infty$
$\delta(n+1)$	$z$	$0 \leq  z  < \infty$
$\delta(n-1)$	$z^{-1}$	$0 <  z  \leq \infty$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z  > a$
$-a^{n-1} u(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z  < a$
$na^{n-1} u(n)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z  > a$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z  < a$
$\cos(\beta n) u(n)$	$\frac{z(z - \cos\beta)}{z^2 - 2z\cos\beta + 1}$	$ z  > 1$
$\sin(\beta n) u(n)$	$\frac{z\sin\beta}{z^2 - 2z\cos\beta + 1}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\beta n) u(n)$	$\frac{z(z - a\cos\beta)}{z^2 - 2az\cos\beta + a^2}$	$ z  >  a $
$a^n \sin(\beta n) u(n)$	$\frac{za\sin\beta}{z^2 - 2az\cos\beta + a^2}$	$ z  >  a $

### 8.1.5 $z$ 反变换

与其他几种变换类似,我们可以利用常用的  $z$  变换对,结合  $z$  变换的性质,来求解  $X(z)$  对应的时域序列  $x(n)$ 。

对于双边  $z$  变换,求解反变换时需要特别注意收敛域。

#### 8.1.5.1 部分分式展开法

当  $X(z)$  是  $z$  的有理分式时,可以采用部分分式展开法。下面举例说明。

**【例 8.1.9】** 已知  $X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$ , 收敛域分别为:

(1)  $|z| > 2$ ; (2)  $|z| < 1$ ; (3)  $1 < |z| < 2$

求其对应的时域序列  $x(n)$ 。

**解:** 观察前面列出的几个常用  $z$  变换对可以发现,对  $X(z)$  进行部分分式展开时,形式上展成  $\frac{z}{(z-a)^m}$  的组合比较好。所以我们令  $X(z) = zX_1(z)$ , 然后对  $X_1(z)$  进行部分分式展开,得到

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2} = \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{3}z}{z+1} + \frac{\frac{1}{3}z}{z-2}$$

有两个极点,  $p_1 = -1, p_2 = 2$ , 收敛域有三种情况:

(1) 当收敛域为  $|z| > 2$  时,

$$x(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n u(n) + \frac{1}{3} \times 2^n u(n)$$

(2) 当收敛域为  $|z| < 1$  时,

$$x(n) = \frac{1}{3}(-1)^n u(-n-1) - \frac{1}{3} \times 2^n u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为  $1 < |z| < 2$  时,

$$x(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n u(n) - \frac{1}{3} \times 2^n u(-n-1)$$

### 8.1.5.2 幂级数展开法

由  $z$  变换的定义式  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$  可以看出, 如果将  $X(z)$  写成幂级数的形式, 那么, 该幂级数各对应项的系数就构成了离散时间信号  $x(n)$ 。下面举例说明。

**【例 8.1.10】** 已知  $X(z) = -2z^{-2} + 2z + 1$ , 求反变换。

解:

根据  $z$  变换的定义, 显然

$$x(2) = -2, x(-1) = 2, x(0) = 1, \text{其余 } x(n) = 0$$

所以,  $x(n) = \{2, 1, 0, -2\}_{-1}$

如果  $X(z)$  不是  $z$  的幂级数形式, 可以采用其他方法(如长除法)将其展成幂级数形式。

**【例 8.1.11】** 已知  $X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$ , 收敛域为  $|z| > 2$ , 试用幂级数展开法求反变换。

解:

由于收敛域为  $|z| > 2$ , 故  $x(n)$  为右边信号,  $X(z)$  为  $z$  的降幂多项式。用长除法时除式应按照  $z$  的降幂排列, 即

$$\begin{array}{r} z^2 - z - 2 \overline{) \frac{z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} + \cdots}{z - 1 - 2z^{-1}}} \\ \underline{z - 1 - 2z^{-1}} \phantom{+} \\ 1 + 2z^{-1} \phantom{+} \\ \underline{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} \phantom{+} \\ 3z^{-1} + 2z^{-2} \phantom{+} \\ \underline{3z^{-1} - 3z^{-2} - 6z^{-3}} \phantom{+} \\ 5z^{-2} + 6z^{-3} \phantom{+} \\ \cdots \end{array}$$

所以,  $x(n) = \{1, 1, 3, 5, \cdots\}_1$ 。

**【例 8.1.12】** 已知  $X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$ , 收敛域为  $|z| < 1$ , 试用幂级数展开法求反变换。

解: 由于收敛域为  $|z| < 1$ , 故  $x(n)$  为左边信号,  $X(z)$  为  $z$  的升幂多项式。用长除法时除

式应按照  $z$  的升幂排列,即

$$\begin{array}{r}
 -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{8}z^3 + \cdots \\
 -2 - z + z^2 \overline{)z} \\
 \hline
 z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^3 \\
 -\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3 \\
 \hline
 -\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{4}z^4 \\
 \hline
 \frac{3}{4}z^3 - \frac{1}{4}z^4 \\
 \hline
 \frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{8}z^4 - \frac{3}{8}z^5 \\
 -\frac{5}{8}z^4 + \frac{3}{8}z^5 \\
 \hline
 \cdots
 \end{array}$$

所以

$$x(n) = \left\{ \cdots, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right\}$$

$\uparrow n = -1$

从上面两个例题可以看出,长除法既可展成升幂级数也可展成降幂级数,这完全取决于收敛域如何。所以运用长除法之前,一定要先根据收敛域确定是左边序列还是右边序列,然后才能正确地决定是按升幂长除,还是按降幂长除,只有选择得当才能使长除得到的  $X(z)$  收敛。另外,利用幂级数展开不易得到闭合形式的表达式。

## 8.2 利用单边 $z$ 变换求解 LTI 系统的响应

与连续时间系统分析中拉氏变换相对应, $z$  变换是分析离散时间 LTI 系统的有力数学工具。本节讨论运用  $z$  变换求解系统响应的一些问题。

如前所述,描述离散时间 LTI 系统的是常系数线性差分方程,其一般形式如下:

$$\begin{aligned}
 y(n-k) + a_{k-1}y(n-k+1) + \cdots + a_1y(n-1) + a_0y(n) \\
 = b_mx(n-m) + b_{m-1}x(n-m+1) + \cdots + b_1x(n-1) + b_0x(n) \quad (8.18)
 \end{aligned}$$

式中,各系数均为实数,设系统的初始状态为  $y(-1)$ 、 $y(-2)$ 、 $\cdots$ 、 $y(-k)$ 。

求解系统响应的计算过程就是求解此差分方程。第2章中讨论了差分方程的时域求解方法,求解过程较为烦琐。下面我们学习用  $z$  变换的方法求解差分方程。

令  $x(n) \leftrightarrow X(z)$ ,  $y(n) \leftrightarrow Y(z)$ , 根据单边  $z$  变换的时移特性,即式(8.9),将式(8.18)等号两边取  $z$  变换,就可以将描述  $y(n)$  和  $x(n)$  之间关系的差分方程变换为描述  $Y(z)$  和  $X(z)$  之间关系的代数方程,并且初始状态已自然地包含在其中,可直接得出系统的全响应解,求解步骤简明且有规律。现举例说明。

**【例 8.2.1】** 某因果离散系统的差分方程为  $y(n) - 4y(n-1) + 3y(n-2) = x(n)$ , 初始条件为  $y(-1) = 0$ ,  $y(-2) = 1/2$ ,  $x(n) = 2^n u(n)$ , 求系统的全响应  $y(n)$ 。

解:对原差分方程两边取 $z$ 变换,可得

$$Y(z) - 4[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 3[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = X(z)$$

将 $y(-1) = 0, y(-1) = 1/2, X(z) = \frac{z}{z-2}$ 代入上式得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{X(z)}{1-4z^{-1}+3z^{-2}} + \frac{4y(-1) - 3z^{-1}y(-1) - 3y(-2)}{1-4z^{-1}+3z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2-4z+3} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{-\frac{3}{2}z^2}{z^2-4z+3} \\ &= \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} + \frac{\frac{9}{2}z}{z-3} + \frac{-4z}{z-2} + \frac{\frac{3}{4}z}{z-1} + \frac{-\frac{9}{4}z}{z-3} \\ &= \underbrace{\frac{\frac{1}{2}z}{z-1} + \frac{\frac{9}{2}z}{z-3}}_{\text{零状态响应 } Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{-4z}{z-2} + \frac{\frac{3}{4}z}{z-1} + \frac{-\frac{9}{4}z}{z-3}}_{\text{零输入响应 } Y_{zi}(z)} \\ &= \underbrace{\frac{\frac{5}{4}z}{z-1} + \frac{\frac{9}{4}z}{z-3}}_{\text{自由响应 } Y_n(z)} + \underbrace{\frac{4z}{z-2}}_{\text{强迫响应 } Y_f(z)} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y(n) &= \underbrace{\frac{1}{2}u(n) + \frac{9}{2}3^n u(n) - 4 \times 2^n u(n)}_{y_{zs}(n)} + \underbrace{\frac{3}{4}u(n) - \frac{9}{4}3^n u(n)}_{y_{zi}(n)} \\ &= \underbrace{\frac{5}{4}u(n) + \frac{9}{4} \times 3^n u(n)}_{y_n(n)} - \underbrace{4 \times 2^n u(n)}_{y_f(n)} \end{aligned}$$

可见, $Y(z)$ 的极点由两部分组成,一部分是系统特征根形成的极点1、3,另一部分是激励信号 $X(z)$ 的极点2。其中固有响应 $Y_n(z)$ 的极点就是系统函数的极点(特征根,又称为固有频率),所以说,固有响应 $y_n(n)$ 的函数形式由系统特征根决定。而强迫响应 $Y_f(z)$ 的极点就是激励信号 $X(z)$ 的极点,所以说,强迫响应 $y_f(n)$ 的函数形式由激励信号决定。

## 8.3 系统函数

### 8.3.1 系统函数

如前所述,描述离散时间LTI系统的是常系数线性差分方程,其一般形式如下:

$$\begin{aligned} y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1y(n+1) + a_0y(n) \\ = b_mx(n+m) + b_{m-1}x(n+m-1) + \cdots + b_1x(n+1) + b_0x(n) \end{aligned} \quad (8.19)$$

设系统初始状态为零,输入 $x(n)$ 的 $z$ 变换记为 $X(z)$ ,零状态响应 $y_{zs}(n)$ 的 $z$ 变换记为 $Y_{zs}(z)$ ,上式两边取 $z$ 变换,得到

$$Y_{zs}(z) \sum_{l=0}^k a_l z^l = X(z) \sum_{r=0}^m b_r z^r$$

令 $A(z) = \sum_{l=0}^k a_l z^l, B(z) = \sum_{r=0}^m b_r z^r$ ,得到

$$Y_{zs}(z) = X(z) \frac{B(z)}{A(z)}$$

令

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (8.20)$$

$H(z)$  称为离散时间系统的系统函数。可见,根据描述系统的差分方程容易写出系统函数  $H(z)$ ,反之亦然。系统函数只取决于系统本身,而与激励无关,与系统内部的初始状态也无关。因此,零状态响应

$$Y_{zs}(z) = X(z)H(z) \quad (8.21)$$

式(8.20)和式(8.21)中的  $H(z)$  是否就是单位样值响应  $h(n)$  的  $z$  变换呢?我们下面进行分析。

当输入为单位样值信号时,即  $x(n) = \delta(n)$  时,  $X(z) = 1$ ,此时的零状态响应即为  $h(n)$ ,根据式(8.21),其  $z$  变换数为

$$\mathcal{Z}[h(n)] = X(z)H(z) = H(z)$$

上式说明,单位样值响应  $h(n)$  与系统函数  $H(z)$  是一对  $z$  变换对。

**【例 8.3.1】** 设离散系统的差分方程  $y(n) - 0.6y(n-1) - 0.16y(n-2) = 5x(n)$ ,试求其系统函数  $H(z)$  和单位样值响应  $h(n)$ 。

**解:** 设初始状态为零,上式两边求  $z$  变换,得到

$$Y_{zs}(z) - 0.6z^{-1}Y_{zs}(z) - 0.16z^{-2}Y_{zs}(z) = 5X(z)$$

所以

$$(1 - 0.6z^{-1} - 0.16z^{-2})Y_{zs}(z) = 5X(z)$$

所以系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{5}{1 - 0.6z^{-1} - 0.16z^{-2}} = \frac{5z^2}{z^2 - 0.6z - 0.16} \\ &= \frac{5z^2}{(z + 0.2)(z - 0.8)} = \frac{z}{z + 0.2} + \frac{4z}{z - 0.8} \end{aligned}$$

由于题目中未指明系统的因果性,应根据收敛域分情况讨论。显然收敛域存在三种可能:

(1) 当收敛域为  $|z| > 0.8$  时

$$h(n) = (-0.2)^n u(n) + 4 \times 0.8^n u(n)$$

(2) 当收敛域为  $|z| < 0.2$  时

$$h(n) = -(-0.2)^n u(-n-1) - 4 \times 0.8^n u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为  $0.2 < |z| < 0.8$  时

$$h(n) = (-0.2)^n u(n) - 4 \times 0.8^n u(-n-1)$$



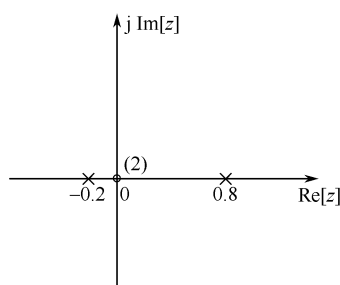


图 8.7 例 8.3.1 系统极零点图

与第 2 章中在时域求解单位样值响应(例 2.3.3)的方法相对比,可见,时域方法只能求解因果系统, $z$  变换的方法不仅能求解因果系统,也能求解非因果系统,而且求解方法简便。

一般来说,离散时间 LTI 系统的系统函数是关于  $z$  的有理多项式,分母多项式  $A(z) = 0$  的根为称为**极点**(特征根),分子多项式  $B(z) = 0$  的根为称为**零点**。

在  $z$  平面标出  $H(z)$  的极、零点位置,极点用“ $\times$ ”表示,零点用“ $\circ$ ”表示,就得到  $H(z)$  的**极零点图**。极零点图可以表示一个系统,常用来分析系统特性。例 8.3.1 中所示系统的极零点图如图 8.7 所示。

### 8.3.2 由极零点图确定频率响应

在学习连续时间信号的傅里叶变换和拉氏变换时我们已经看到,对于连续时间信号在  $s$  平面虚轴上的拉氏变换就是其傅里叶变换,同时讨论了根据系统函数  $H(s)$  的极零点图用几何的方法可确定出频率响应  $H(j\omega)$ 。对于离散时间信号  $x(n)$ ,在  $z$  平面单位圆上的  $z$  变换就是其离散时间傅里叶变换,同样可以利用系统函数  $H(z)$  的极零点图,用几何方法确定其频率响应  $H(\Omega)$ 。然而,由于在这种情况下是在  $|z| = 1$  的单位圆上求值,所以应该考虑从极点和零点到单位圆上的向量,而不是到虚轴上的向量。

设系统函数为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^k (z - p_j)}$$

当收敛域包含单位圆时,频率响应

$$H(\Omega) = H(z) \big|_{z=e^{j\Omega}} = K \frac{\prod_{i=1}^m (e^{j\Omega} - z_i)}{\prod_{j=1}^k (e^{j\Omega} - p_j)} = |H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)}$$

令  $e^{j\Omega} - p_j = A_j e^{j\theta_j}$ ,  $e^{j\Omega} - z_i = B_i e^{j\psi_i}$ , 则

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= |H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)} = K \frac{\prod_{i=1}^m B_i e^{j\psi_i}}{\prod_{j=1}^k A_j e^{j\theta_j}} \\ &= K \frac{B_1 B_2 \cdots B_m e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m)}}{A_1 A_2 \cdots A_k e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)}} \\ &= K \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_k} e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)]} \end{aligned}$$

故幅频特性为

$$|H(\Omega)| = K \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_k} \quad (8.22)$$

相频特性为

$$\angle H(\Omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) \quad (8.23)$$

所以,系统的幅频特性是各个零点到单位圆上的向量长度之积,再除以各个极点到单位圆上的向量长度之积,相频特性是各个零点到单位圆上的向量幅角之和,再减去各个极点到单位圆上的向量幅角之和。如图 8.8 所示。当然,这里假定  $K > 0$ ,当  $K < 0$  时,还有一个附加的相位  $\pi$ 。

这样,利用式(8.22)和式(8.23),就可以根据极零点图利用几何图解法来分析系统的幅频特性和相频特性。

当  $\Omega$  从  $0 \sim 2\pi$  变化时,即复变量  $z$  从  $z = 1$  沿单位圆逆时针方向旋转一周时,各极点向量和零点向量的模和幅角也随之变化,根据式(8.22)和式(8.23)就能得到系统的幅频特性和相频特性。当旋转到某个极点  $p_i$  附近,使得相应向量的长度最短时,则该极点对此  $\Omega$  处的幅频响应有增强的作用。若极点  $p_i$  愈靠近单位圆,则幅频响应在峰值附近愈尖锐。如果极点落在单位圆上,则峰值趋于无穷大。零点的作用恰好相反。

位于原点处的极零点对系统幅频特性不产生作用,因而在  $z = 0$  处加入或者去除极点或零点,幅频特性不变,而只会影响相频特性。

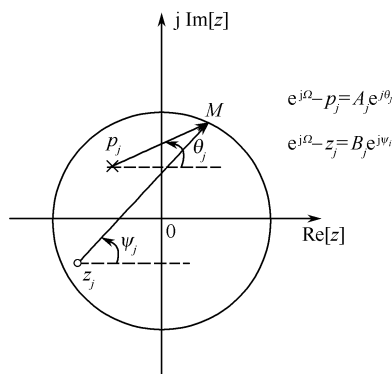


图 8.8 极零点向量图

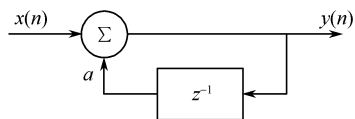


图 8.9 一阶离散时间系统

**【例 8.3.2】** 求图 8.9 所示一阶因果离散时间系统 ( $0 < a < 1$  为常数) 的频率响应,大致画出幅频特性图,并分析系统的滤波特性。

**解:** 该系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

零点  $z_1 = 0$ , 极点  $p_1 = a$

由于  $0 < a < 1$ , 收敛域包含单位圆,  $H(\Omega)$  存在。

$$H(\Omega) = H(z) \big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a} = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - a\cos\Omega + ja\sin\Omega}$$

幅频特性

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\Omega)^2 + a^2 \sin^2 \Omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}}$$

相频特性

$$H(\Omega) = -\arctan \frac{a\sin\Omega}{1 - a\cos\Omega}$$

当  $a = 0.2$  和  $a = 0.9$  时频率响应如图 8.10(a)、(b) 所示,可见,系统完成低通滤波功能。下面用极零点图来分析系统的幅频特性。

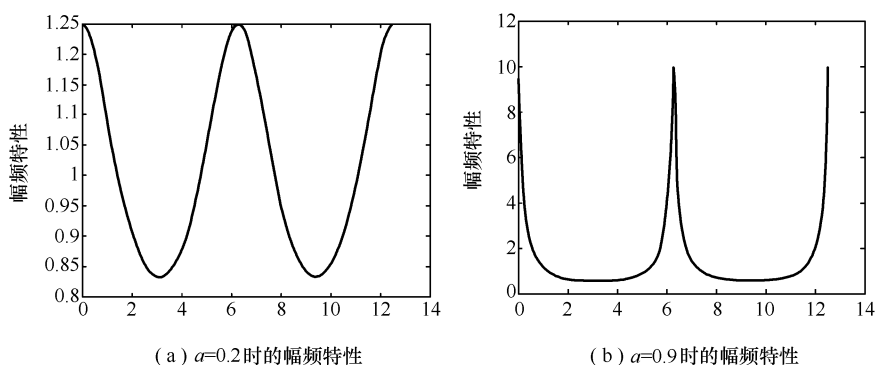


图 8.10 频率响应

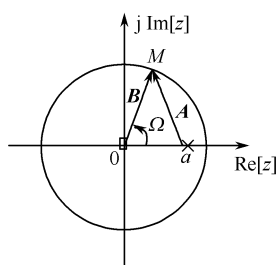


图 8.11 极零点图

该系统的极零点图如图 8.11 所示。在单位圆上取一点  $M$ , 对应的相角为  $\Omega$ , 过极点和零点分别向  $M$  连线得到向量  $A$  和  $B$ , 则

由于零点位于原点, 向量  $B$  的模始终为 1。而当  $\Omega = 0$  时,  $M$  点与极点距离最近, 即向量  $A$  的模最小, 此时  $|H(\Omega)|$  最大; 当  $\Omega$  从 0 逐渐增大到  $\pi$ , 向量  $A$  的模逐渐增大, 所以系统幅频特性  $|H(\Omega)|$  逐渐减小; 当  $\Omega = \pi$  时,  $|H(\Omega)|$  最小;  $\Omega$  从  $\pi$  继续逐渐增大到  $2\pi$ ,  $A$  的模逐渐减小, 所以  $|H(\Omega)|$  逐渐增大。并且,  $a$  越接近 1, 极点越靠近单位圆,  $\Omega = 2n\pi$  时  $|H(\Omega)|$  的峰值越尖锐。与图 8.10 中的分析结果

是一致的。

### 8.3.3 系统因果性和稳定性

#### 1. 系统因果性分析

若系统为因果系统, 则单位样值响应  $h(n)$  满足

$$h(n) = 0, n < 0 \quad (8.24)$$

式(8.24)给出了因果系统的时域特征, 显然, 由于  $n < 0$  时  $h(n)$  的样值点均为零, 其系统函数  $H(z)$  为  $z$  的负幂多项式, 故其收敛域必定包含无穷远点。

#### 2. 系统稳定性分析

稳定性是系统一个极为重要的特性, 也是系统能够正常工作的基本条件。第 2 章中已经证明, 离散时间系统为稳定系统的充分必要条件是, 单位样值响应  $h(n)$  满足绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \leq M, M \text{ 为有限正常数} \quad (8.25)$$

前面讨论离散时间傅里叶变换的收敛性时已经指出: 只要信号绝对可和, 它的傅里叶变换就存在。也就是说, 如果系统稳定, 则单位样值响应  $h(n)$  绝对可和, 那么系统函数  $H(z)$  的收敛域就包含单位圆。

前面我们分别得出了系统因果和系统稳定的条件, 表 8.3 进行了总结。

表 8.3 系统因果性和稳定性分析

系统特性	时域特点	$z$ 域特点
因果系统	$h(n) = 0, n < 0$	收敛域必定包含无穷远点
稳定系统	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \leqslant M, M$ 为有限正常数	收敛域就包含单位圆
因果稳定系统	$h(n) = 0, n < 0$ , 并且 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \leqslant M, M$ 为有限正常数	所有极点都位于单位圆内

【例 8.3.3】 已知某离散时间系统的系统函数为  $H(z) = \frac{z}{z^2 - 7/2z + 3}$ , 画出收敛域, 讨论其因果性和稳定性, 并说明原因。

解: 有两个一阶极点,  $p_1 = 2, p_2 = \frac{3}{2}$ , 收敛域可以有三种情况, 如图 8.12 所示。

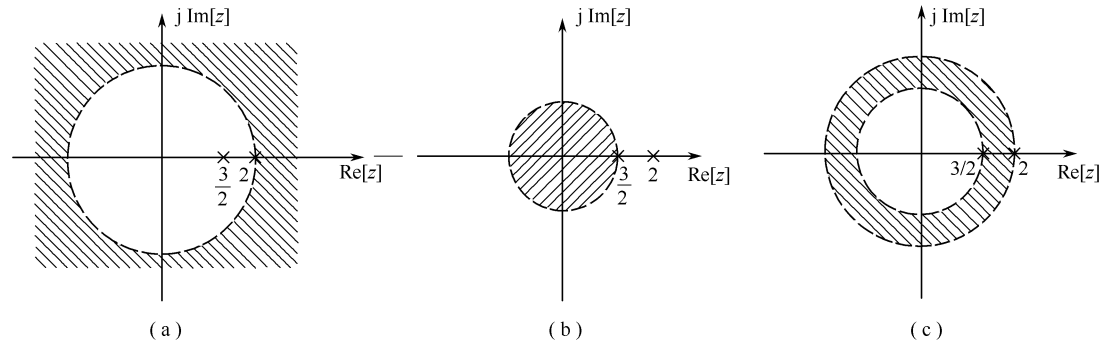


图 8.12 例 8.3.3 中的收敛域

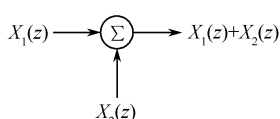
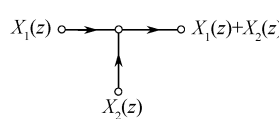
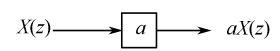
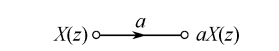
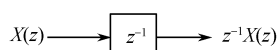
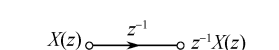
- (1) 收敛域为  $|z| > 2$ : 因为收敛域不包含单位圆, 故系统不稳定; 因为收敛域包含无穷远点, 故系统是因果系统;
- (2) 收敛域为  $|z| < \frac{3}{2}$ : 因为收敛域包含单位圆, 故系统稳定; 因为收敛域不包含无穷远点, 故系统是非因果系统;
- (3) 收敛域为  $\frac{3}{2} < |z| < 2$ : 因为收敛域不包含单位圆, 故系统不稳定; 因为收敛域不包含无穷远点, 故系统是非因果系统。

8.3.4 系统的图形表示方法

与连续时间系统类似, 离散时间系统也可以用方框图或信号流图来表示, 二者可以相互转换。表 8.4 给出了基本运算单元的框图和流图表示。

可以根据信号流图, 利用梅森公式求解系统函数  $H(z)$ , 也可以根据  $H(z)$  画出信号流图。与连续时间系统稍有不同的是, 离散时间系统的流图中的回路习惯上用带箭头的直线表示, 而不像连续时间系统那样用圆弧线表示。下面举例说明。

表 8.4 基本运算单元的框图和流图表示

名称	框图表示	流图表示
加法器		
标量乘法器 (数乘器)		
单位延时器		

【例 8.3.4】 已知某离散时间系统的框图如图 8.13(a) 所示,画出其流图表示形式,求出系统函数,并求出系统的差分方程。

解:流图表示如图 8.13(b) 所示。

两个回路: $L_1 = a_1 z^{-1}$ ,  $L_2 = a_2 z^{-2}$ , 其流图特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$$

只有一条前向通路,  $T_1 = b_0$ , 拆除后, 无回路, 故  $\Delta_1 = 1$ 。

所以, 根据梅森公式, 容易得出系统函数

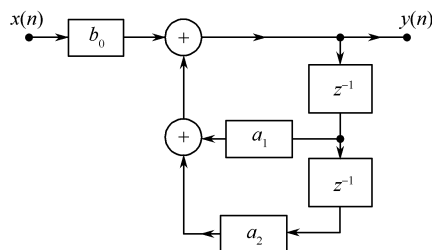
$$H(z) = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

所以有

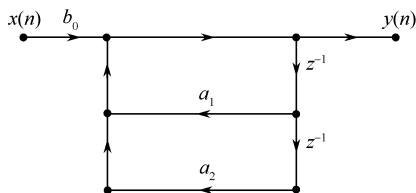
$$Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) = b_0 X(z)$$

因此, 该离散时间系统的差分方程为

$$y(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) = b_0 x(n)$$



(a) 系统方框图



(b) 信号流图

图 8.13 例 8.3.4

## 习 题 八

8.1-1 求下列离散时间信号的  $z$  变换, 并指出收敛域。

(1)  $\delta(n-1)$

(2)  $\delta(n+1)$

$$\begin{aligned}
 (3) & \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) & (4) & -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \\
 (5) & \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(n) & (6) & \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)] \\
 (7) & \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) & (8) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \\
 (9) & \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} & (10) & 3^n u(n) - 2^n u(-n-1)
 \end{aligned}$$

8.1-2 判断 8.1-1 题中各个离散时间信号的离散时间傅里叶变换是否存在,并观察  $z$  变换的收敛域,总结存在傅里叶变换的离散时间信号其  $z$  变换收敛域的特点。

8.1-3 设  $x(n]$  为偶信号,其  $z$  变换为  $X(z)$ ,

(1) 证明:  $X(z) = X(z^{-1})$

(2) 根据上述结果,证明:如果  $X(z)$  的一个极点(零点)产生于  $z = z_0$ ,那么必然在  $z = \frac{1}{z_0}$  也出现一个极点(零点)。

(3) 对下面每个序列,验证(2)小题的结论。

(a)  $x(n) = \delta(n+1) + \delta(n-1)$

(b)  $x(n) = \delta(n+1) - \frac{5}{2}\delta(n) + \delta(n-1)$

(c)  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2^n u(-n-1)$

8.1-4 已知因果信号  $x(n]$  的  $z$  变换  $X(z)$ ,求  $x(n]$  的初值  $x(0)$  与终值  $x(\infty)$ 。

(1)  $X(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$       (2)  $X(z) = \frac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

(3)  $X(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$

8.1-5 已知  $x(n) = a^n u(n)$ ,  $h(n) = u(n) - u(n-N)$ ,利用  $z$  变换求  $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

8.1-6 直接从下列  $z$  变换求所对应的离散时间信号  $x(n]$ 。

(1)  $X(z) = 1, 0 \leq |z| \leq \infty$

(2)  $X(z) = z^3, 0 \leq |z| < \infty$

(3)  $X(z) = z^{-1}, 0 < |z| \leq \infty$

(4)  $X(z) = -2z^{-2} + 2z + 1, 0 < |z| < \infty$

(5)  $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > a$

(6)  $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < a$

8.1-7 用部分分式展开法求下列  $z$  变换对应的  $x(n]$ 。

(1)  $X(z) = \frac{z\left(3z - \frac{5}{6}\right)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$ , 且  $x(n]$  绝对可和。

(2)  $X(z) = \frac{z-1}{z^2-5z+6}$ , 且  $x(n]$  为因果信号。

8.1-8  $X(z) = \frac{z}{z^2-z-2}$ , 收敛域为  $1 < |z| < 2$ , 试用幂级数展开法求反变换。

8.2-1 利用单边  $z$  变换解下列差分方程。

(1)  $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05x(n), x(n) = u(n), y(-1) = 1$

$$(2) y(n) + 2y(n-1) = x(n), x(n) = (n-2)u(n), y(0) = 1$$

$$(3) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1), x(n) = u(n), y(-1) = 1$$

- 8.2-2 设某离散系统的差分方程为  $y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$ , 输入信号  $x(n) = 2^n u(n)$ , 初始条件  $y(0) = 0, y(1) = 2$ , 试求其系统的全响应、零输入响应、零状态响应、固有响应和强迫响应。

- 8.3-1 已知系统的系统函数为  $H(z) = \frac{9.5z}{(z-0.5)(10-z)}$ , 在  $10 < |z| \leq \infty$  及  $0.5 < |z| < 10$  两种收敛域情况下求系统的单位样值响应, 并判断系统的稳定性与因果性。

- 8.3-2 已知某离散时间 LTI 系统差分方程为  $y(n-1) - \frac{5}{2}y(n) + y(n+1) = x(n)$ ,

- (1) 假设为因果系统, 求单位样值响应  $h(n)$ , 并判断系统的稳定性;
- (2) 假设为反因果系统, 求单位样值响应  $h(n)$ , 并判断系统的稳定性;
- (3) 假设为稳定系统, 求单位样值响应  $h(n)$ , 并判断系统的因果性。

- 8.3-3 一个因果线性时不变系统由下列差分方程描述:

$$y(n-2) + \frac{3}{2}y(n-1) - y(n) = -x(n-1)$$

- (1) 求该系统的系统函数  $H(z)$ , 画出极零点图, 并指出收敛域。
- (2) 求该系统的单位脉冲响应  $h(n)$ 。
- (3) 判断系统的稳定性, 若该系统是一个不稳定系统, 试求出一个满足此差分方程的稳定系统的单位脉冲响应, 并判断其因果性。

- 8.3-4 用计算机对测量的数据  $x(n)$  进行平均处理, 当收到一个测量数据后, 计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均。试求这一运算过程的频率响应。

- 8.3-5 已知离散时间系统差分方程为  $y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$ , 求系统函数, 并画出直接实现形式、级联实现形式和并联实现形式的信号流图。

## 第 9 章 离散傅里叶变换

至今我们已讨论了 4 种形式的傅里叶变换,即连续时间傅里叶级数 CTFS(FS)、连续时间傅里叶变换 CTFT(FT)、离散时间傅里叶级数(DTFS)和离散时间傅里叶变换(DTFT)。对于一个连续信号,其频谱用 FT 表示;对于一个周期性连续信号,其频谱(严格讲为各次谐波分量幅度)用 FS 表示;对于一个离散信号,其频谱用 DTFT 表示;对于一个周期性离散信号,其频谱用 DTFS 表示。

在计算机上实现信号的频谱分析及其他方面的处理工作时,对信号的要求是:在时域和频域都应是离散的,且都应是有限长的。上述的 4 种变换中,只有 DTFS 在时域和频域都是离散的,但又都是无限长。为此,我们要导出一种更为有用的变换,这就是离散傅里叶变换(DFT),可以同时实现在时域和频域都是离散的,而且都是有限长的。

DFT 是数字信号处理中最基本的,也是最重要的运算。它除了在理论上相当重要之外,由于存在着离散傅里叶变换的有效快速算法,因而离散傅里叶变换在各种数字信号处理的算法中起着核心的作用。

### 9.1 离散傅里叶变换(DFT)

DTFS 在时域和频域上都是离散的,但是周期序列长度为无限长。周期序列实际上只有有限个序列值有意义,因而它的离散傅里叶级数也适用于有限长序列,这就得到有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)。

一个有限长序列  $x(n)$ ,它的傅里叶变换  $X(\Omega)$  是一个连续的周期函数(序列的傅里叶变换也可以用  $X(e^{j\Omega})$  表示,意味着序列的傅里叶变换对应着  $z$  变换单位圆上的抽样,其物理含义更加明确)。现对  $X(\Omega)$  在频域上进行抽样,如一个周期内采  $N$  个点,得到在频域上的周期离散序列  $\tilde{X}(k)$ 。根据离散傅里叶级数的概念,与  $\tilde{X}(k)$  相对应的,在时域上也一定是一个周期离散序列  $\tilde{x}(n)$ ,其周期也为  $N$ 。当频域上抽样点数  $N$  满足一定条件时,可保证从  $\tilde{x}(n)$  取出一个周期即为  $x(n)$ 。如果从  $\tilde{X}(k)$  取其一个周期称为  $X(k)$ ,那么  $x(n)$  与  $X(k)$  之间的关系,就是离散傅里叶变换。

设  $x(n)$  是一个长度为  $N$  的有限长序列,即  $x(n)$  只在  $n = 0, 1, \dots, N-1$  有值,其它  $n$  时,  $x(n) = 0$ 。我们对其频谱的每个周期作  $N_0$  点抽样,得到频域周期离散序列  $\tilde{X}'(k)$ 。 $\tilde{X}'(k)$  是周期序列,因此存在唯一的时域周期序列  $\tilde{x}'(n)$ ,它的 DTFS 正好为  $\tilde{X}'(k)$ 。因此有

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\Omega} \quad (9.1)$$

$$\tilde{X}'(k) = X(e^{jk\frac{2\pi}{N_0}}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N_0}kn} \quad (9.2)$$



$$\begin{aligned}
 \tilde{x}'(n) &= \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X'(k) e^{j\frac{2\pi}{N_0}nk} \\
 &= \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N_0}k}) e^{j\frac{2\pi}{N_0}nk} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-jl\frac{2\pi}{N_0}k} e^{j\frac{2\pi}{N_0}nk} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi}{N_0}k(n-l)}
 \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi}{N_0}k(n-l)} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi}{N_0}k(l-n)} = \begin{cases} 1, & l = mN_0 + n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此

$$\tilde{x}'(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n + mN_0) = x((n))_{N_0} = x_{N_0}(n) \quad (9.3)$$

从式(9.3)可以看出,  $\tilde{x}'(n)$  是由  $x(n)$  以  $N_0$  为周期延拓而成。 $N_0 \geq N$ , 时域上的周期延拓就不会出现混叠, 一般取  $N_0 = N$ 。取出  $\tilde{x}'(n)$  的一个周期, 就可以得到  $x(n)$ 。由此我们可以得到 DFT 的表达式。

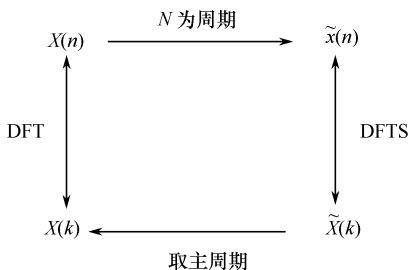


图 9.1 DFT 定义过程

DFT 的定义过程是这样的。如图 9.1 所示, 对于一个长度为  $N$  的有限长序列  $x(n)$ , 首先以  $N$  为周期进行周期延拓, 得到周期序列  $\tilde{x}(n)$ , 其离散傅里叶级数为周期序列  $\tilde{X}(k)$  [为了使信号在时域上和频域上有着一致的表示, 在 7.1 节我们曾用系数  $X_k$  表示的傅里叶级数, 以后改用序列值  $\tilde{X}(k)$  表示, 两者只是表示形式上的区别]。从周期序列  $\tilde{x}(n)$  中取出一个周期的  $N$  个值, 就是有限长序列  $x(n)$ ; 从

周期序列  $\tilde{X}(k)$  中取出一个周期的  $N$  个值, 得到有限长序列  $X(k)$  [相当于  $x(n)$  频谱一个周期的  $N$  个抽样值]。 $x(n)$  与  $X(k)$  之间的变换关系就是离散傅里叶变换。

定义:

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (9.4)$$

$\tilde{x}(n)$  与  $\tilde{X}(k)$  的 DTFS 表达式为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (9.5)$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (9.6)$$

则  $x(n)$  与  $X(k)$  之间 DFT 变换关系为

$$\text{正变换} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k) \quad (9.7)$$

$$\text{反变换} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} R_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} R_N(n) \quad (9.8)$$

定义旋转因子

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (9.9)$$

则 DFT 变换关系为

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (9.10)$$

离散傅里叶变换的示意图如图 9.2 所示。显然 DFT 并不是一个新的傅里叶变换形式，它实际上来自于 DTFS，只不过在时域、频域各取一个周期而已。一般定义周期序列中  $n = 0, 1, \dots, N-1$  的第一个周期为序列的主值周期，而主值周期上的序列称为周期序列的主值序列。

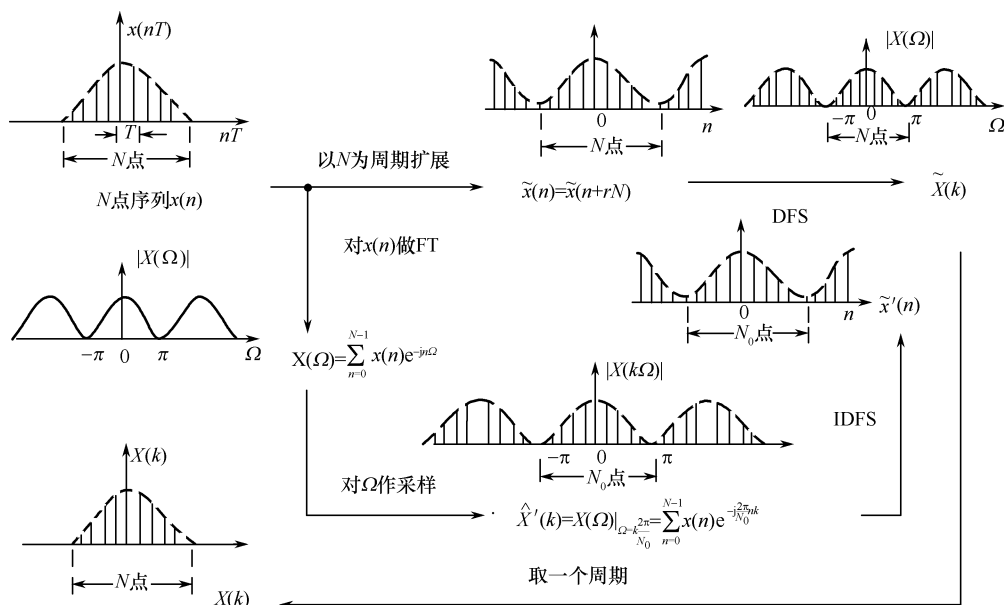


图 9.2 离散傅里叶变换示意图

这里有几点需要注意：

(1)  $x(n)$  与  $X(k)$  之间的 DFT 变换关系是唯一的。已知  $x(n)$  就能唯一确定  $X(k)$ ，反之亦然。

(2)  $X(k)$  不是  $x(n)$  的频谱，而是其频谱  $X(\Omega)$  一个周期的抽样。

(3) 满足  $N_0 \geq N$  的频域抽样条件， $X(k)$  能代表  $x(n)$  的频谱。

(4) 定义 DFT 时， $x(n)$  与  $X(k)$  都是周期序列的一个周期，即 DFT 隐含着周期性。根据 DFT 的定义过程，即  $x(n) \rightarrow x((n))_N \rightarrow X((k))_N \rightarrow X(k)$ ，导致有可能不同序列得到相同的  $X(k)$ 。

(5) 取不同的 DFT 长度(取不同的  $N$  值), 序列  $x(n)$  的 DFT 不同。

【例 9.1.1】 如图 9.3 所示的 4 个序列的 8 点 DFT 是相同的。

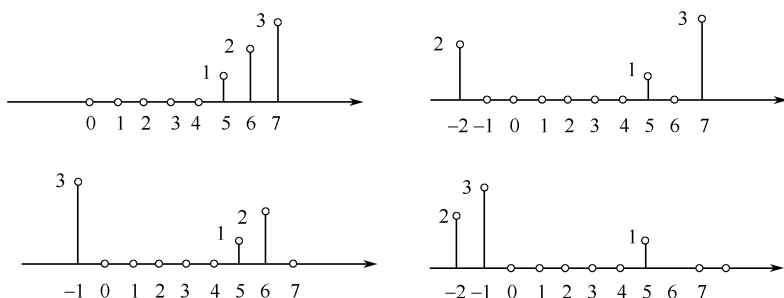


图 9.3 4 个序列

【例 9.1.2】  $x(n) = R_4(n)$ , 分别求  $x(n)$  的 8 点和 16 点 DFT。

解: (1) 设  $N = 8$ , 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} \\ &= \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}k4}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}k}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} (e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{8}k} (e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k})} \\ &= e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{8}k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 7) \end{aligned}$$

(2) 设变换区间  $N = 16$ , 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{15} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} \\ &= \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{16}k4}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{16}k}} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}k} (e^{j\frac{\pi}{4}k} - e^{-j\frac{\pi}{4}k})}{e^{-j\frac{\pi}{16}k} (e^{j\frac{\pi}{16}k} - e^{-j\frac{\pi}{16}k})} \\ &= e^{-j\frac{3\pi}{16}k} \frac{\sin \frac{\pi}{4}k}{\sin \frac{\pi}{16}k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 15) \end{aligned}$$

变换结果如图 9.4 所示。

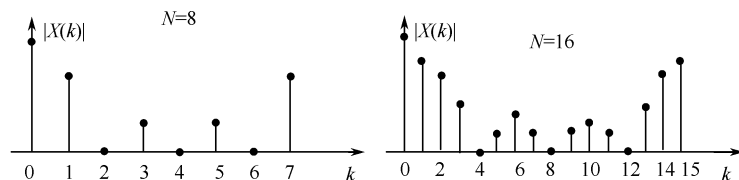


图 9.4 例题 9.1.2 的结果

这样, 对任一有限长序列  $x(n)$ , 都可按式(9.10) 方便地在计算机上求其频谱。但需要记住: 只要使用式(9.10), 不管  $x(n)$  本身是否来自周期序列, 都应把它看作某一周期序列的一个周期。DFT 的这一特点决定了它的许多特殊性质。

读者不难发现,要想求出一点  $X(k)$ ,需要  $N$  次复数乘法;要想求出  $N$  点  $X(k)$ ,需要  $N^2$  次复数乘法。当  $N$  很大时,其计算量是相当大的。第 10 章介绍快速傅里叶变换算法使  $N$  点 DFT 的计算量下降为  $\frac{N}{2} \log_2 N$  次,从而使 DFT 成为信号处理中最重要最方便的运算。

## 9.2 DFT 与 $z$ 变换、傅里叶变换的相互关系

有限长序列  $x(n)$  的 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

其  $z$  变换表示式为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

比较 DFT 与  $z$  变换,可以看出,当  $z = W_N^{-k}$  时,

$$X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X(k)$$

即

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}}$$

$z = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ ,说明  $W_N^{-k}$  是  $z$  平面单位圆上幅角为  $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$  的点,即把  $z$  平面单位圆  $N$  等分后的第  $k$  点。因此 DFT 是  $z$  变换在单位圆上等角距的  $N$  个抽样值,  $x(n)$  的  $z$  变换  $X(z)$  在单位圆上从  $0 \sim 2\pi$  的  $N$  点等间隔抽样值就是  $X(k)$ 。图 9.5(a) 为  $N=8$  时的  $z$  变换单位圆等间隔抽样情况, (b) 为  $N=7$  时的  $z$  变换单位圆等间隔抽样情况。

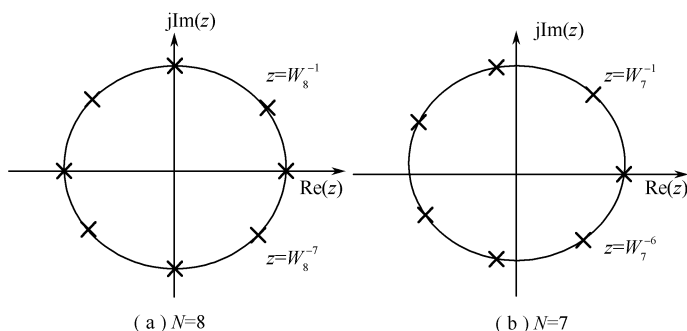


图 9.5  $z$  变换单位圆等间隔抽样

既然  $N$  个频域抽样  $X(k)$  能不失真地代表长度为  $N$  的有限长序列,那么 DFT 也一定可以完整地表示整个  $X(z)$ 。

将

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

代入  $z$  变换表示式中,得到

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} z^{-n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-k} z^{-1})^n \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z)
\end{aligned} \tag{9.11}$$

这就是  $X(z)$  用  $N$  个频域抽样  $X(k)$  来表示的内插公式, 其中  $\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}, k = 0, \dots, N-1$  为内插函数。

内插函数的特点是在单位圆上有  $N$  个零点  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} (k = 0, 1, \dots, N-1)$ 、第  $k$  个内插函数在  $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$  有一个极点, 与该处的零点相互抵消, 且使该处值为 1。内插函数共有  $N-1$  个零点, 在  $z = 0$  处有  $N-1$  阶极点。

序列的  $z$  变换在单位圆上的结果就是 DTFT, 因此序列的 DTFT 也可以通过  $X(k)$  插值得到。令  $z = e^{j\Omega}$  代入内插公式(9.11), 便可得到频域响应表示式

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\Omega})$$

其中

$$\begin{aligned}
\Phi_k(e^{j\Omega}) &= \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - W_N^{-k} e^{-j\Omega}} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}Nk} e^{-j\Omega N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\Omega}} \\
&= \frac{e^{j\frac{\pi}{N}Nk} e^{-jN\frac{\Omega}{2}} (e^{-j\frac{\pi}{N}Nk} e^{jN\frac{\Omega}{2}} - e^{j\frac{\pi}{N}Nk} e^{-jN\frac{\Omega}{2}})}{e^{j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{\Omega}{2}} (e^{-j\frac{\pi}{N}k} e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{\Omega}{2}})} \\
&= e^{-j(N-1)\frac{1}{2}(\Omega - \frac{2k\pi}{N})} \frac{\sin\left[\frac{N}{2}\left(\Omega - \frac{2k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\Omega - \frac{2k\pi}{N}\right)\right]} \\
&= \Phi\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)
\end{aligned}$$

则

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \tag{9.12}$$

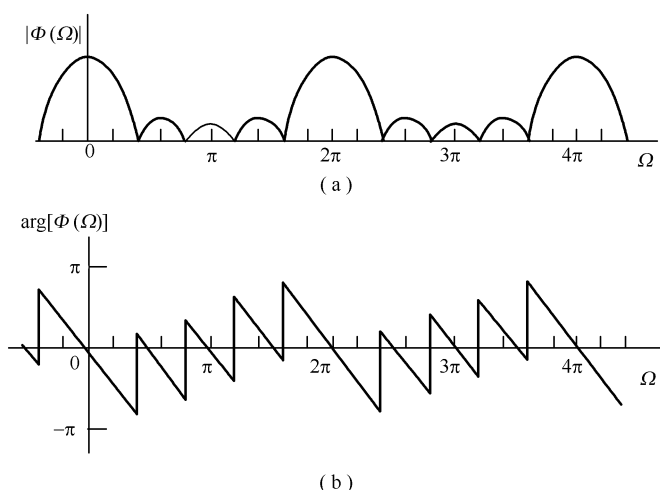
其中内插函数

$$\Phi(\Omega) = \frac{\sin\left(N\frac{\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} e^{-j\Omega(N-1)/2} \tag{9.13}$$

也称为数字 sinc 函数。

图 9.6 中表示出  $N = 5$  时的内插函数  $\Phi(\Omega)$  的幅度和相位特性, 可以看出, 内插函数的幅度特性为 sinc 函数, 而相位具有线性相位特性。

$X(\Omega)$  是由  $N$  个  $\Phi\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$  函数组合而成, 其中每个函数加权系数为  $X(k)$ 。由式(9.13)可以看到, 当  $\Omega = 0$  时,  $\Phi(\Omega) = 1$ ; 当  $\Omega = \frac{2\pi}{N}i (i = 1, 2, \dots, N-1)$  时,  $\Phi(\Omega) = 0$ 。对  $\Phi\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$  则有, 当  $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$  时,  $\Phi(\Omega) = 1$ ; 当  $\Omega = \frac{2\pi}{N}(i-k), i \neq k$  时,  $\Phi(\Omega) = 0$ 。也就是说

图 9.6  $N=5$  时的内插函数  $\Phi(\Omega)$  的幅度和相位特性

$\Phi\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$  函数在本抽样点上的值为 1, 而在其他抽样点上为零。因此频率函数  $X(\Omega)$  的值, 在  $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ ) 这些抽样点上就等于  $X(k)$ ; 而在抽样点之间  $X(\Omega)$  的值就由各抽样值乘以相应的内插函数叠加而成。

### 9.3 DFT 等效数字滤波器组

利用 DFT 可以对数字信号进行谱分析, 这是因为 DFT 运算可等效于一个线性相位的滤波器组。

由旋转因子的周期性可知

$$W_N^{-kN} = e^{j\frac{2\pi}{N}kN} = 1$$

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{kr} = W_N^{-kN} \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{kr} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(N-r)} \quad (9.14)$$

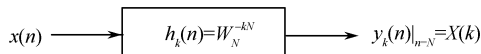
定义序列

$$y_k(n) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r) W_N^{-k(n-r)} = x(n) * W_N^{-kn}, k=0, 1, \dots, N-1 \quad (9.15)$$

对比式(9.14)和式(9.15), 可得

$$X(k) = y_k(n) \big|_{n=N}$$

由此可见,  $y_k(n)$  是有限时宽序列  $x(n)$  ( $0 \leq n \leq N-1$ ) 和序列  $W_N^{-nk}$  的离散卷积, 因此,  $y_k(n)$  可以看成是单位抽样响应为  $h_k(n) = W_N^{-nk}$  的滤波器对输入信号的响应, 而  $X(k)$  是该系统在  $n=N$  时刻的输出值, 如图 9.7 所示。

图 9.7 序列通过响应为  $W_N^{-nk}$  的滤波器

这样一来,序列  $x(n)$  的  $N$  点 DFT 就相当于序列通过了一个滤波器组,该滤波器组共有  $N$  个滤波器,其中第  $k$  个滤波器的单位抽样响应为  $h_k(n) = W_N^{-nk}$ ,  $0 \leq n \leq \infty$ 。在  $n = N$  时刻,该滤波器组的输出即为  $x(n)$  的  $N$  点 DFT 值  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。该滤波器组如图 9.8 所示。

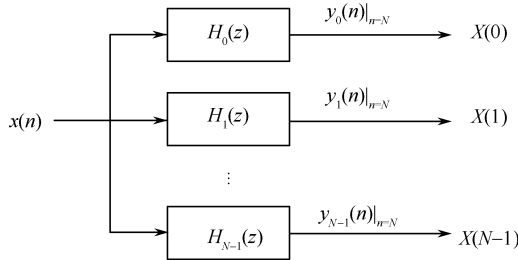


图 9.8 与 DFT 等效的滤波器组

利用  $z$  变换,每个滤波器的系统函数为

$$H_k(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_k(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} W_N^{-kn} z^{-n} = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}, |z| > 1$$

可知该滤波器组为不稳定系统,极点在单位圆上。为此将每个滤波器的单位抽样响应截短,写成

$$h_k(n) = W_N^{-nk}, n = 1, 2, \dots, N$$

该滤波器组在  $n = N$  时也满足  $X(k) = y_k(n) |_{n=N}$ ,而这时,每个滤波器为有限长滤波器,系统稳定。

由此得滤波器组的系统函数为

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \sum_{n=1}^N h_k(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^N W_N^{-kn} z^{-n} - 1 = \frac{1 - W_N^{-k(N+1)} z^{-(N+1)}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} - 1 \\ &= W_N^{-k} z^{-1} \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = W_N^{-k} z^{-1} \frac{W_N^{-\frac{kN}{2}} z^{-\frac{N}{2}}}{W_N^{-\frac{k}{2}} z^{-\frac{1}{2}}} \frac{W_N^{\frac{kN}{2}} z^{\frac{N}{2}} - W_N^{-\frac{kN}{2}} z^{-\frac{N}{2}}}{W_N^{\frac{k}{2}} z^{\frac{1}{2}} - W_N^{-\frac{k}{2}} z^{-\frac{1}{2}}} \\ &= W_N^{-\frac{k(N+1)}{2}} z^{-\frac{N+1}{2}} \frac{W_N^{\frac{kN}{2}} z^{\frac{N}{2}} - W_N^{-\frac{kN}{2}} z^{-\frac{N}{2}}}{W_N^{\frac{k}{2}} z^{\frac{1}{2}} - W_N^{-\frac{k}{2}} z^{-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

令  $z = e^{j\Omega} = e^{j\omega T}$ ,可得第  $k$  个滤波器的幅度响应为

$$|H_k(\Omega)| = \left| \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}kN} e^{j\frac{\Omega N}{2}} - e^{j\frac{\pi}{N}kN} e^{-j\frac{\Omega N}{2}}}{e^{-j\frac{\pi}{N}k} e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{\Omega}{2}}} \right| = \left| \frac{\sin\left[\frac{N}{2}\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)\right]} \right| \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.16)$$

又  $\Omega = \omega T = 2\pi\omega/\omega_s$ ,则

$$|H_k(\Omega)| = \left| \frac{\sin\left[N\pi\left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{k}{N}\right)\right]}{\sin\left[\pi\left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{k}{N}\right)\right]} \right| \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.17)$$

若取  $N = 8$ ,可以画出  $k = 0, 1, \dots, 7$  时各滤波器的幅度特性,如图 9.9 所示。图中只画出

了  $k = 0, 1, 2, 7$  时的幅度特性。

由此可见,滤波器组中每个滤波器中心频率为  $\omega = \frac{k}{N}\omega_s$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) (或  $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$ ), 幅度特性为  $|\sin Nx / \sin x|$ , 相邻滤波器中心频率间隔为  $\frac{\omega_s}{N}$  (或  $\frac{2\pi}{N}$ )。离散傅里叶变换相当于用这一组滤波器对输入序列  $x(n)$  进行滤波, 每个滤波器在  $N$  时刻的输出相当于序列频谱的一个抽样值, 所有滤波器在  $N$  时刻的输出即为序列的  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , 这就是利用 DFT 进行谱分析的实质。由于  $|\sin Nx / \sin x|$  函数的旁瓣较高, 为了减小旁瓣, 可以对  $h_k(n)$  进行加窗处理, 这也就引出加窗 DFT。

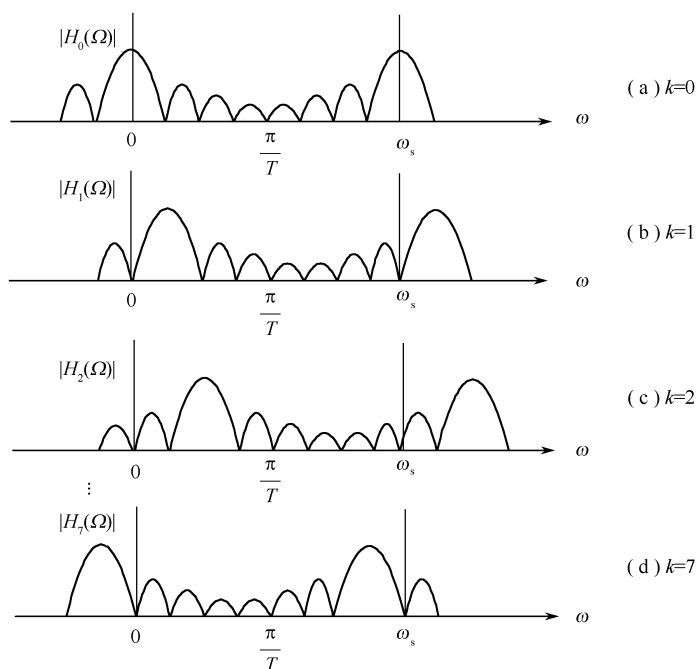


图 9.9 与 DFT 等效的滤波器组的幅度特性

## 9.4 DFT 的性质

这一节我们讨论有限长 DFT 的性质, 这些性质都与 DFT 隐含的周期性有着密切的联系。

假定  $x(n)$  和  $y(n)$  是两个长度为  $N$  的序列,  $X(k)$  和  $Y(k)$  分别是它们的  $N$  点离散傅里叶变换, 记为  $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ,  $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$ 。

### 9.4.1 线性

离散傅里叶变换(DFT)是线性变换, 满足齐次性和叠加性。即对任意常数  $a, b$ , 有

$$\begin{aligned} \text{DFT}[ax(n) + by(n)] &= a\text{DFT}[x(n)] + b\text{DFT}[y(n)] \\ &= aX(k) + bY(k) \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (9.18)$$



### 9.4.2 序列的圆周移位(循环移位)

长度为  $N$  的序列  $x(n)$  的圆周移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (9.19)$$

由定义式可以看出,将  $x(n)$  以  $N$  为周期进行周期延拓得到  $\tilde{x}(n)$ ,再将  $\tilde{x}(n) = x((n))_N$  移  $m$  位得到  $\tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$ ,取  $x((n+m))_N$  的主值序列得序列  $x(n)$  的圆周移位序列  $y(n)$ , $y(n)$  的长度依旧为  $N$ 。图 9.10 示出这个循环移位的全过程,以  $N=8$  向左循环移位 3 位为例。从中我们可以得出, $N$  点序列的圆周移位等价于该时间序列周期性外延的线性移位,反之亦然的结论。

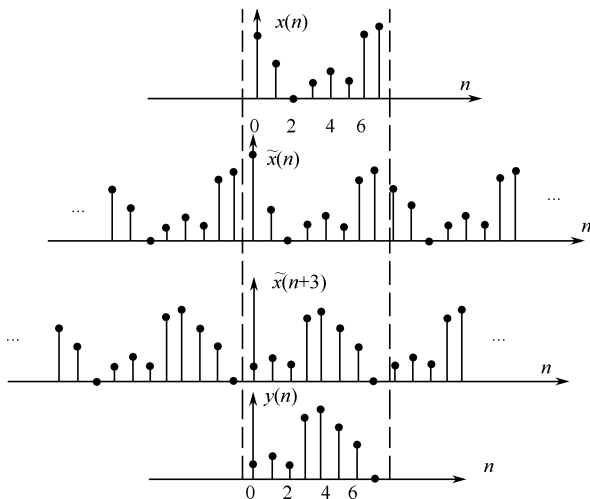


图 9.10 序列的循环移位

设周期序列  $\tilde{x}(n)$  的离散傅里叶级数为  $\tilde{X}(k)$ ,则根据离散傅里叶级数的性质, $x((n+m))_N$  的离散傅里叶级数为

$$\text{DFS}[x((n+m))_N] = W_N^{-km} \tilde{X}(k)$$

这样我们就可以得到圆周移位后序列  $y(n) = x(n+m)_N R_N(n)$  的 DFT 为

$$\text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-km} \tilde{X}(k) R_N(k) = W_N^{-km} X(k) \quad (9.20)$$

我们称式(9.20)为时域圆周移位定理。

与(9.20)式类似,可以定义频域圆周移位序列如下:

$$Y(k) = X((k+l))_N R_N(k) \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (9.21)$$

且

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (9.22)$$

我们称式(9.22)为频域圆周移位定理。

有限长序列时域上的圆周移位,在频域上引入了一个线性相移  $W_N^{-km} = e^{j(\frac{2\pi}{N})km}$ ;由  $W_N^{nl} = e^{-j(\frac{2\pi}{N})nl} = e^{-j(\frac{\omega_s l}{N})nT}$ ,频域上的圆周移位,相当于在时域上调制了  $\frac{\omega_s l}{N}$  的频率。

### 9.4.3 共轭对称性

前面我们讨论过的傅里叶变换的对称性。对于任一  $N$  点长序列  $x(n)$ ，都可以表示为共轭对称分量  $x_e(n)$  和共轭反对称分量  $x_o(n)$  之和，其中

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \quad -(N-1) \leq n \leq (N-1)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \quad -(N-1) \leq n \leq (N-1)$$

$x_e(n)$  和  $x_o(n)$  均为  $2N-1$  点长。

这里将讨论有限长序列 DFT 的对称性。由于 DFT 隐含周期性，其周期等于序列的长度  $N$ ，因而不能再用上面的定义。因此根据 DFT 隐含的周期性，这里定义周期共轭对称分量和周期共轭反对称分量。

将有限长序列  $x(n)$  以  $N$  为周期进行周期延拓得到  $\tilde{x}(n)$ ，周期序列  $\tilde{x}(n)$  可以表示成共轭对称序列  $\tilde{x}_e(n)$  和共轭反对称序列  $\tilde{x}_o(n)$  之和，其中

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]$$

$\tilde{x}_e(n)$  和  $\tilde{x}_o(n)$  均为周期序列，周期均为  $N$ 。现在我们分别取出它们的主值周期，定义为

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]R_N(n)$$

则

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)$$

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

式中， $x_{ep}(n)$  称为周期共轭对称序列； $x_{op}(n)$  称为周期共轭反对称序列。

显然， $x_{ep}(n)$  和  $x_{op}(n)$  不等于  $x_e(n)$  和  $x_o(n)$ ，但可以证明

$$x_{ep}(n) = [x_e(n) + x_e(n-N)]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = [x_o(n) + x_o(n-N)]R_N(n)$$

可以看到共轭对称分量  $x_e(n)$  和共轭反对称分量  $x_o(n)$  在主值区间内发生混叠便形成  $x_{ep}(n)$  和  $x_{op}(n)$ 。

在频域上同样可以定义周期共轭对称序列和周期共轭反对称序列。

$$\tilde{X}_e(k) = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)] \quad \tilde{X}_o(k) = \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)]$$

$$X_{ep}(k) = \tilde{X}_e(k)R_N(k) \quad X_{op}(k) = \tilde{X}_o(k)R_N(k)$$

则

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

利用上述这些定义,我们可以得到 DFT 的一些对称性质。

(1) 有限长序列  $x(n)$  的实部对应 DFT 的周期共轭对称序列

$$\operatorname{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(n)]R_N(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)]R_N(k) = X_{\text{ep}}(k)$$

(2) 有限长序列  $x(n)$  的虚部对应 DFT 的周期共轭反对称序列

$$\operatorname{jIm}[x(n)] = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(n)]R_N(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)]R_N(k) = X_{\text{op}}(k)$$

(3) 有限长序列  $x(n)$  的周期共轭对称序列对应 DFT 的实部

$$x_{\text{ep}}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(k)]R_N(k) = \operatorname{Re}[X(k)]$$

(4) 有限长序列  $x(n)$  的周期共轭反对称序列对应 DFT 的虚部

$$x_{\text{op}}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(k)]R_N(k) = \operatorname{jIm}[X(k)]$$

(5) 当  $x(n)$  为实序列时,具有一些很有用的性质

$$X(k) = \tilde{X}^*(-k)R_N(k) = \tilde{X}^*(N-k)R_N(k)$$

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(N-k)]$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|$$

$$\arg X(k) = -\arg X(N-k)$$

#### 9.4.4 循环卷积

假定有两个长度为  $N$  的有限时宽序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$ ,它们各自的 DFT 为

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ X_2(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (9.23)$$

假如我们将两个 DFT 相乘,则结果也是一个  $N$  点 DFT,称作  $X_3(k)$ ,其 IDFT 为长度为  $N$  的序列  $x_3(n)$ 。下面,让我们确定序列  $x_3(n)$  与序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  之间的关系。

我们有

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$X_3(k)$  的 IDFT 为

$$x_3(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k) e^{j2\pi km/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} X_1(k) X_2(k) e^{j2\pi km/N}$$

假定我们利用式(9.29)定义的 DFT 替代其中的  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$ ,则可以得到

$$x_3(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi kn/N} \right] \left[ \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) e^{-j2\pi kl/N} \right] e^{j2\pi km/N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} \right] \quad (9.24)$$

在(9.24)式方括号中的求和具有以下形式:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases}$$

其中,  $a$  定义为

$$a = e^{j2\pi(m-n-l)/N}$$

当  $m-n-l$  为  $N$  的倍数时,  $a = 1$ ; 等于其他值时,  $a^N = 1$ 。因此

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & l = m - n + pN = ((m-n))_N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将结果代入式(9.24), 则可得到所期望的  $x_3(m)$  的表达式

$$x_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2((m-n))_N \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.25)$$

式(9.25)中的  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  可以交换位置, 其表达式具有卷积和的形式。然而, 它不是将线性系统的输出序列  $y(n)$  与输入序列  $x(n)$  和冲击响应  $h(n)$  联系在一起的普通的线性卷积, 在卷积过程中要求序列周期化、反折和圆周移位, 另外要求  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的长度相等, 并且卷积结果的长度与它们相同。式(9.25)被称为两序列的  **$N$  点循环卷积**, 记为

$$x_3(m) = x_1(m) \circledast x_2(m)$$

所以, 我们可以得出, **两个序列的 DFT 的乘积等效于这两个序列在时域的循环卷积**。循环卷积特性可表示为

$$\begin{aligned} x_1(n) &\xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_1(k) \\ x_2(n) &\xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_2(k) \end{aligned}$$

则有

$$x_1(n) \circledast x_2(n) \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} X_1(k) X_2(k)$$

**【例 9.4.1】** 设两个有限长序列分别为  $x_1(n) = n(n=0, 1, 2, 3)$  和  $x_2(n) = R_3(n)$ , 求它们的 4 点循环卷积。

我们用图解法说明计算过程, 如图 9.11 所示。

根据公式  $x(n) = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$ , 我们首先将  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  换变量得  $x_1(m)$  和  $x_2(m)$ , 由于  $x_2(m)$  长度为 3 点, 需要在  $m=3$  处补 0 延长至 4 点, 并对其进行周期延拓得  $x_2((m))_4$ , 反折移位得  $x_2((n-m))_4$ ; 将  $x_1(m)$  和  $x_2((n-m))_4$  相乘并在  $0 \sim (N-1)$  区间上求和, 最后乘以  $R_4(n)$  得到  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的圆周卷积,  $x(n) = \{5, 4, 3, 6\} \quad n = 0, 1, 2, 3$ 。

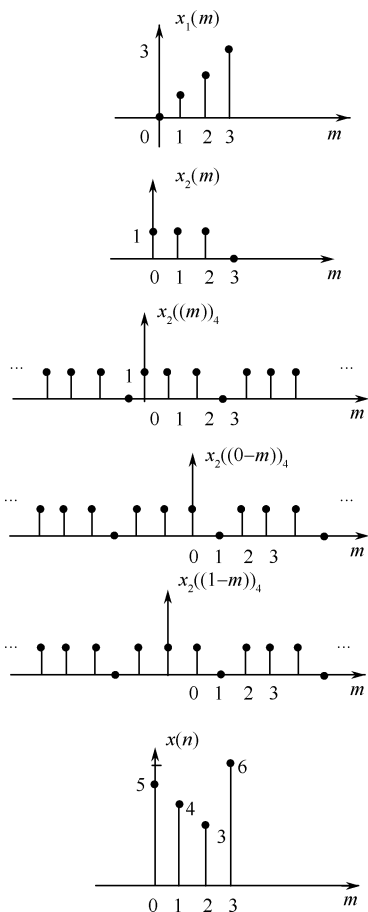


图 9.11 例题 9.4.1 循环卷积过程

【例 9.4.2】 利用序列 DFT 的循环卷积特性,确定对应于例 9.4.1 题的序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的循环卷积序列。

首先,计算  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的 DFT。 $x_1(n)$  的 4 点 DFT 为

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^3 x_1(n) e^{-j2\pi kn/4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

可得

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 6 & X_1(1) &= -2 + 2j & X_1(2) &= -2 \\ X_1(3) &= -2 - 2j \end{aligned}$$

$x_2(n)$  的 DFT 为

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^3 x_2(n) e^{-j2\pi kn/4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

可得

$$X_2(0) = 3 \quad X_2(1) = -j \quad X_2(2) = 1 \quad X_2(3) = j$$

将两个 DFT 相乘时,便可得到积

$$X(k) = X_1(k)X_2(k)$$

可得

$$X(0) = 18, X(1) = 2 + 2j, X(2) = -2, X(3) = 2 - 2j$$

计算  $X(k)$  的 IDFT 为

$$x(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(k) e^{-j2\pi nk/4} \quad n = 0, 1, 2, 3$$

因此有

$$x(0) = 5 \quad x(1) = 4 \quad x(2) = 3 \quad x(3) = 6$$

这就是例 9.4.1 计算循环卷积所得到的结果,如图 9.11 所示。

### 9.4.5 循环卷积与线性卷积关系

对于两个有限长序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$ ,长度分别为  $N_1$  和  $N_2$ 。我们知道,其线性卷积的长度为  $N_1 + N_2 - 1$ 。现在对这两个序列作  $N$  点的循环卷积,循环卷积的值能否与线性卷积的值相同,仅仅取决于循环卷积的长度  $N$ 。当  $N \geq N_1 + N_2 - 1$  时,循环卷积结果与线性卷积结果相同。这样一来,我们就可以通过 DFT 来计算线性卷积,而 DFT 计算存在着快速算法。

设  $X_1(e^{j\Omega})$  为序列  $x_1(n)$  的频谱,  $X_2(e^{j\Omega})$  为序列  $x_2(n)$  的频谱。根据傅里叶变换的性质,若

$$x'(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad (9.26)$$

则  $x'(n)$  长度为  $N_1 + N_2 - 1$ 。若  $X'(e^{j\Omega})$  为序列  $x'(n)$  的频谱,则

$$X'(e^{j\Omega}) = X_1(e^{j\Omega})X_2(e^{j\Omega}) \quad (9.27)$$

设  $X_1(k)$  为序列  $x_1(n)$  的  $N$  点 DFT,相当于序列频谱一个周期的  $N$  点抽样,  $X_2(k)$  为序列  $x_2(n)$  的  $N$  点 DFT。若

$$X(k) = X_1(k)X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.28)$$

其 IDFT 为  $x(n)$ , 则  $x(n)$  为  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的  $N$  点循环卷积

$$x(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) \quad (9.29)$$

对比式(9.27)和式(9.28), 可以看到  $X(k)$  相当于  $X'(e^{j\Omega})$  一个周期的  $N$  点抽样。抽样造成时域上序列  $x'(n)$  以  $N$  为周期的周期延拓, 即式(9.26)的线性卷积序列  $x'(n)$  和式(9.29)的循环卷积序列  $x(n)$  间关系为

$$x(n) = \left[ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x'(n+rN) \right] R_N(n)$$

即循环卷积是线性卷积经周期延拓后的主值序列。

因此, 当满足  $N \geq N_1 + N_2 - 1$  条件时, 周期延拓在时域上不会发生混叠, 循环卷积和线性卷积结果相同; 当  $N < N_1 + N_2 - 1$  时, 时域上就会发生混叠, 则循环卷积的结果在某些点上与线性卷积结果相比较是错误的。例 9.4.3 说明了这一问题。

**【例 9.4.3】** 设两个有限长序列分别为  $x_1(n) = R_8(n)$  和  $x_2(n) = \{1, 2, 3\}_0$ , 长度分别为  $N_1 = 8$  和  $N_2 = 3$ 。分析它们的线性卷积和 8 点循环卷积间关系。

我们可以用线性卷积加混叠来说明循环卷积的形成过程, 分析结果如图 9.12 所示。图(f)循环卷积结果可以认为是图(c), (d), (e) 叠加后取主值序列  $0 \leq n \leq N-1 (N=8)$  的结果。由于不满足  $N \geq N_1 + N_2 - 1$  的条件, 混叠造成循环卷积前  $N_2 - 1$  点 ( $n=0, 1$ ) 与线性卷积结果相比是错误的,  $N_2 - 1 \leq n \leq N-1$  点 ( $n=2, 3, 4, 5, 6, 7$ ) 与线性卷积结果相同。不难看出, 若满足  $N \geq N_1 + N_2 - 1$  的条件, 就不会出现混叠的情况, 循环卷积结果就与线性卷积结果相同。

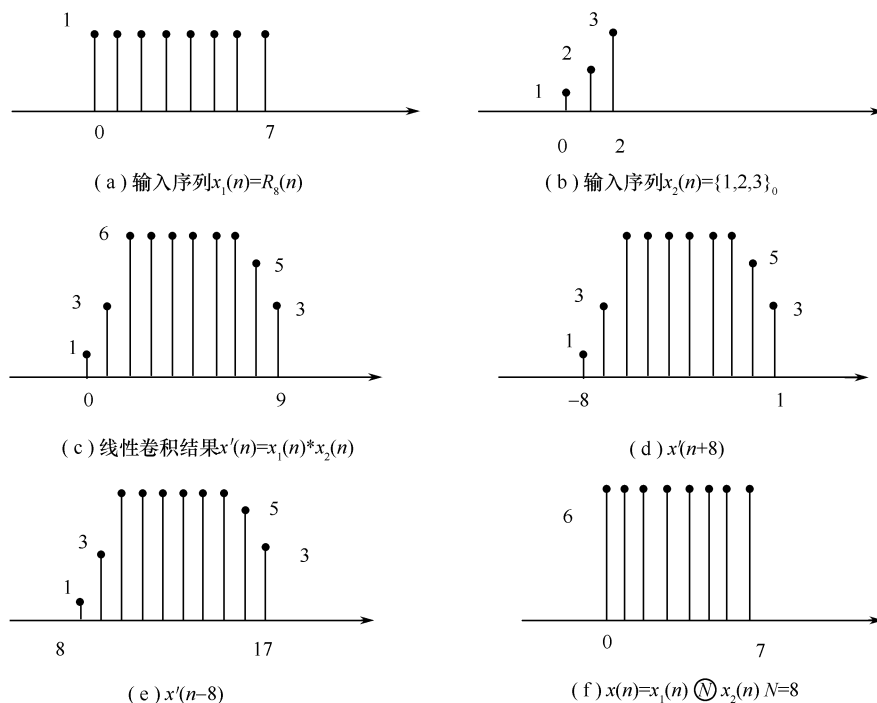


图 9.12 例题 9.4.3 循环卷积与线性卷积关系

## 9.5 用 DFT 实现线性时不变系统

由于离散傅里叶变换 DFT 有快速算法,因此信号处理的许多运算都可以用 DFT 实现。本节介绍用 DFT 计算线性时不变系统的输出响应,下一节介绍用 DFT 对连续信号进行频谱分析这两个基本应用。

线性时不变系统的输出响应是输入和系统单位抽样响应的线性卷积。从前面讨论可知, DFT 的乘积相当于序列的循环卷积,在一定条件下,循环卷积具有线性卷积的效果。由于离散傅里叶变换具有高效的快速算法,因此可以用 DFT 来实现线性时不变系统。

### 9.5.1 DFT 计算线性卷积

假设线性时不变系统单位抽样响应  $h(n)$  的长度为  $N_2$  点,输入序列  $x(n)$  的长度为  $N_1$  点,输出序列  $y(n) = x(n) * h(n)$ ,其长度为  $N_1 + N_2 - 1$ 。根据循环卷积与线性卷积的对应关系,可用循环卷积  $x(n) \otimes h(n)$  ( $N = N_1 + N_2 - 1$ ) 来实现线性卷积,而循环卷积的计算通过 DFT 来实现。如图 9.13 所示,其具体步骤为:

(1) 将  $x(n)$  补上  $N_2 - 1$  个零点,  $h(n)$  补上  $N_1 - 1$  个零点,形成两个  $N = N_1 + N_2 - 1$  点长序列;

(2) 分别计算  $x(n)$  与  $h(n)$  的  $N$  点 DFT  $X(k)$  和  $H(k)$ ;

(3) 计算  $Y(k) = X(k)H(k)$ ;

(4) 计算  $Y(k)$  的  $N$  点 IDFT,其结果即为  $y(n)$ 。

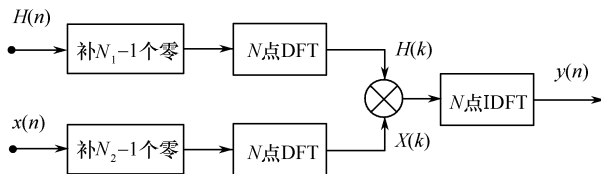


图 9.13 DFT 实现线性时不变系统

其中, DFT 与 IDFT 的计算可用快速算法来实现,其运算量要比时域直接运算要小的多。

在实际应用中,一般  $N_1 \gg N_2$ ,如果取  $N = N_1 + N_2 - 1$ ,作  $N$  点 DFT,则  $h(n)$  需补充很多零,而且  $x(n)$  必须全部输入,这样存储量大,运算时间长,信号延时大,不能实现实时处理。解决的办法就是将  $x(n)$  分段,用  $x(n)$  的每一个子段与  $h(n)$  进行卷积,最后将结果相加。这种分段处理的方法有重叠相加法和重叠保留法。

### 9.5.2 重叠相加法

设系统单位抽样响应  $h(n)$  的长度为  $M$ ,输入信号  $x(n)$  的长度很长。将  $x(n)$  分成多个段,每段的长度为  $N$ ,使  $N$  与  $M$  有相同的数量级。如果用  $x_k(n)$  表示  $x(n)$  的第  $k$  个块,则

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n)$$

其中  $x_k(n) = x(n) \cdot R_N(n - kN)$ 。

于是  $h(n)$  与  $x(n)$  的卷积可表示为

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n) * x_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \quad (9.30)$$

式(9.30)说明,计算  $h(n)$  与  $x(n)$  的卷积,可先进行分段线性卷积,然后把分段卷积结果叠加即可。由于  $y_k(n)$  的长度为  $N+M-1$ ,  $y_k(n)$  与  $y_{k+1}(n)$  相加时有  $M-1$  个点需重叠相加。重叠部分相加再和不重叠的部分共同组成总的输出。显然,可以用 DFT 的快速算法计算  $y_k(n)$ , 这样可以使卷积速度加快,减少运算量减少延时。

如图 9.14 所示,设  $x(n)$  的长度为  $3N$ ,将  $x(n)$  等分为三段,每段长为  $N$ ,即  $x_0(n)$  的取值区间为  $[0, N-1]$ ,  $x_1(n)$  的取值区间为  $[N, 2N-1]$ ,  $x_2(n)$  的取值区间为  $[2N, 3N-1]$ ,写成表示式为  $x(n) = \sum_{k=0}^2 x_k(n)$ 。各段输出分别为  $y_0(n)$ ,  $y_1(n)$ ,  $y_2(n)$ , 相加后得到系统输出  $y(n)$ 。

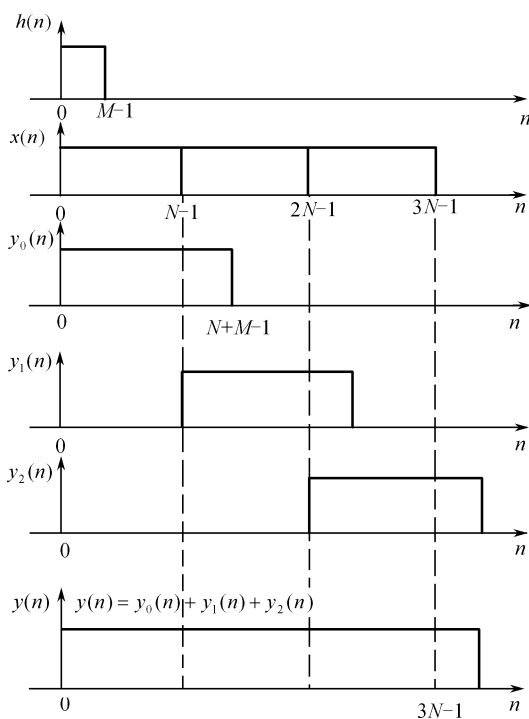


图 9.14 重叠相加法实现线性时不变系统

**【例 9.5.1】**  $x(n) = n+1, 0 \leq n \leq 9, h(n) = \{1, 0, -1\}, n = 0, 1, 2$ , 利用  $N = 4$  分段重叠相加法求线卷积  $x(n) * h(n)$ 。

首先对  $x(n)$  按  $N = 4$  进行分段,得到

$$\begin{cases} x_1(n) = \{1, 2, 3, 4\}_0 \\ x_2(n) = \{5, 6, 7, 8\}_4 \\ x_3(n) = \{9, 10, 0, 0\}_8 \end{cases}$$

下面需要计算  $y_i(n) = x_i(n) * h(n), i = 1, 2, 3$ 。我们可以通过  $N+M-1$  点 DFT 来实现, 得到



$$\begin{cases} y_1(n) = \{1, 2, 2, 2, -3, -4\} \\ y_2(n) = \{5, 6, 2, 2, -7, -8\} \\ y_3(n) = \{9, 10, -9, -10, 0, 0\} \end{cases}$$

最后,将  $y_i(n)$  重叠部分相加,即  $y_{i+1}(n)$ ,  $i=1,2$  的前  $M-1=2$  个值与  $y_i(n)$ ,  $i=1,2$  的后  $M-1=2$  个值相加,  $y_3(n)$  的后两个值去掉,得  $y(n) = \{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, -9, -10\}$ 。

### 9.5.3 重叠保留法

设  $h(n)$  长度为  $P$ ,  $x(n)$  分段后每段  $x_i(n)$  长度为  $L$ 。如果将  $h(n)$  与  $x_i(n)$  做  $L$  点循环卷积,则循环卷积结果的前  $P-1$  个点 ( $0 \sim P-2$ ) 是不正确的,而其余的点和线性卷积的结果相同。为此,可将  $x(n)$  分成长度为  $L$  的多个块,但段与段之间重叠  $P-1$  个点,每一块时间原点选在该块的起始点,而不是  $x(n)$  的原点,如图 9.15(a) 所示。(其中第 0 块已经填充了  $P-1$  个零

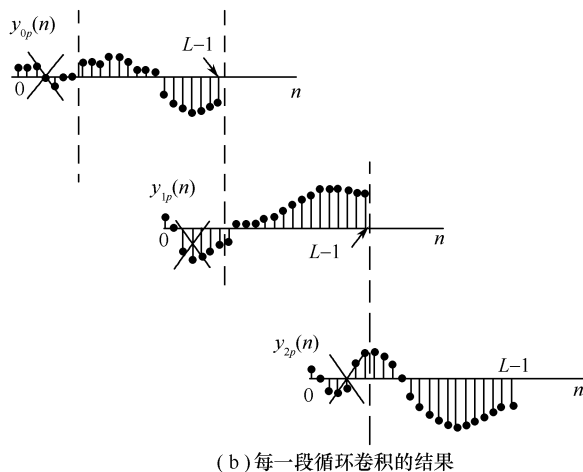
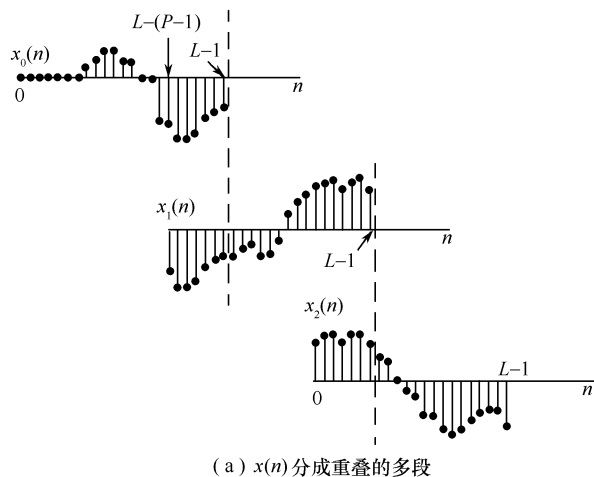


图 9.15 重叠保留法

值点)。若每一块  $x_i(n)$  与  $h(n)$  的  $L$  点循环卷积用  $y_{ip}(n)$  来表示,则每块输出  $y_{ip}(n)$  在区间  $0 \leq n \leq P-2$  内的那些点是不正确的,需要去掉,如图 9.15(b) 所示。去掉各块输出中不正确的点,再把相邻各块留下的点衔接起来,就构成最后输出  $y(n)$ 。

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i[n - i(L - P + 1)]$$

这里  $n$  是  $y(n)$  的原点。其中

$$y_i(n) = \begin{cases} y_{ip}(n) & P-1 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

这时,每段输出的时间原点是  $y_i(n)$  的起始点,而不是  $y(n)$  的原点。

重叠保留法这个名称的由来是:相邻的每个输入段均由前一段保留下来的  $P-1$  个点和  $L-P+1$  个新的点组成。

## 9.6 DFT 进行信号的频谱分析

DFT 的重要应用是分析连续信号的频率成分。例如,测速雷达要分析接收信号的多普勒频移以确定目标的速度。还有语音信号分析和处理中,语音信号的频率分析对于音腔谐振的辨识和建模特别有用。

对连续信号进行谱分析就是用傅里叶变换将时间信号转变为频率信号:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9.31)$$

式(9.31)中的  $x(t)$  和  $X(j\omega)$  都是连续函数,不便于计算机进行运算,必须将其离散化。按照傅里叶变换的理论,若信号的持续时间是有限的,则其频谱无限宽,反之,若信号的频谱有限宽,则其持续时间是无限的。由抽样定理,将  $x(t)$  抽样时,抽样频率应是信号最高频率的两倍以上;那么,当信号持续时间有限时,对它进行抽样时就不可能满足抽样定理。因此,为了防止时域抽样后出现频谱混叠现象,在对连续信号抽样前,对它进行预滤波,这就引入了抗混叠低通滤波器 LPF(预滤波器)。另一种情况,当连续信号无限长或很长时,抽样点数太多以致无法存储和计算,解决的方法就是截取有限长进行 DFT,相当于加窗处理。即在计算  $x(n)$  的 DFT 之前,用一个时域有限的窗函数乘到序列  $x(n)$  上。时域连续信号离散傅里叶分析的基本步骤如图 9.16 所示。

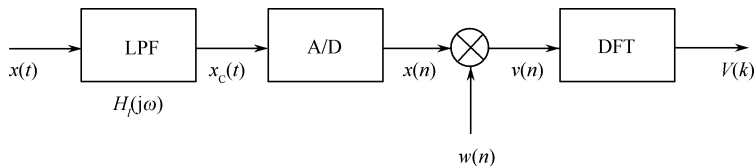


图 9.16 时域连续信号离散傅里叶分析处理步骤

图 9.17 画出了图 9.16 中所有信号的傅里叶变换。图 9.17(a) 是时域连续信号的频谱  $X(j\omega)$ ,其能量主要集中在  $\pm\omega_0$  之间,在高频部分逐渐减小,但不是限带的。图 9.17(b) 画出了 LPF 的频率响应  $H_1(j\omega)$ 。信号通过 LPF 后,超过 LPF 截止频率的频率分量被滤除,这样抽样时不会发生混叠。由于 LPF 通带特性不是理想的,因此,信号在其通带内的频率分量也略有变化,见图 9.17(c) 中  $X_c(j\omega)$ 。

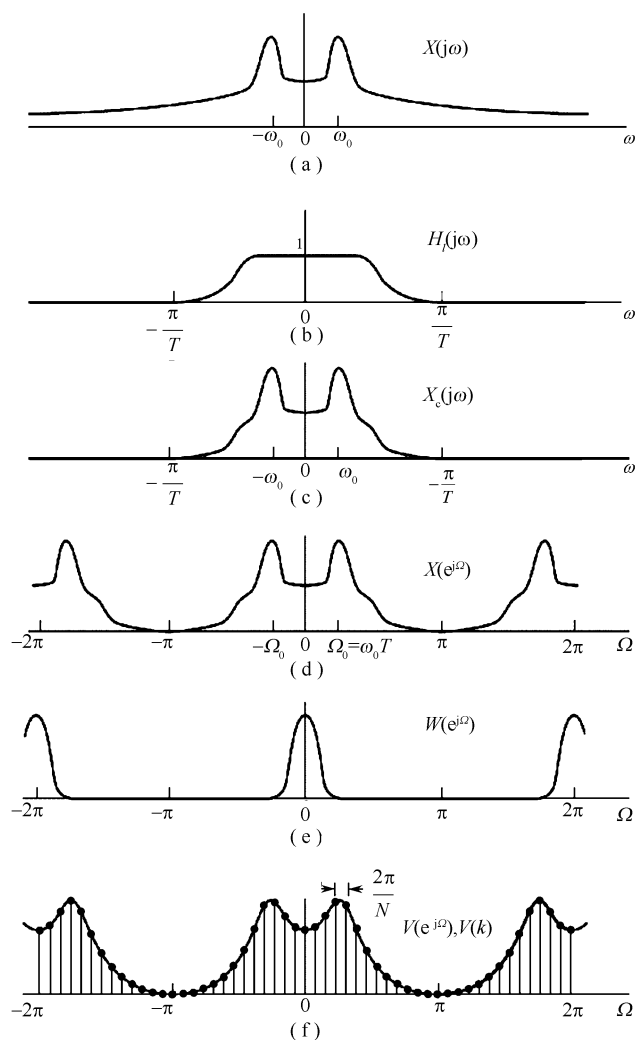


图 9.17 图 9.16 中各信号的频谱

$x_c(t)$  通过 A/D 变换器后得到时域离散序列  $x(n)$ , 抽样间隔为  $T$ , 其频谱用  $X(e^{j\Omega})$  表示,

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\Omega}{T} + j\frac{2\pi}{T}r\right)$$

如图 9.17(d) 所示。由于 LPF 阻带特性也不是理想的, 因此抽样后离散信号频谱  $X(e^{j\Omega})$  仍然是有混叠的。

为进行有限长 DFT, 需要对序列  $x(n)$  进行加窗处理, 即  $v(n) = x(n)w(n)$ 。根据序列傅里叶变换的性质, 时域加窗对频谱的影响为

$$V(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

其中  $W(e^{j\Omega})$  为窗函数, 如图 9.17(e) 所示。常用的窗函数有矩形窗、海明窗、汉宁窗等, 将在第 11 章详细讨论。

最后进行 DFT 运算。

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$V(k)$  相当于  $v(n) = x(n)w(n)$  的频谱  $V(e^{j\Omega})$  的等间隔抽样, 图 9.17(f) 画出了  $V(k)$  和  $V(e^{j\Omega})$  及其关系。 $V(k)$  是  $x(t)$  的离散频率函数。

$V(k)$  在频谱  $V(e^{j\Omega})$  的一个周期抽样  $N$  点, 数字频率抽样间隔为  $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$ 。对应模拟角频率抽样间隔为  $\Delta\omega = \frac{\Delta\Omega}{T} = \frac{2\pi}{NT}$ , 对应模拟频率抽样间隔为

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{NT} \quad (9.32)$$

式(9.32)为频率分辨率表示式, 表示谱分析中能够分辨的最小间隔。可见频率分辨率与信号记录时间有关。要提高频率分辨率就要增加信号记录时间, 在抽样间隔不变的情况下, 抽样点数就要增加, 也就是 DFT 的点数增加, 存储量和计算量都会增加。

在做 DFT 时, 人们常在有效数据后面补一些零, 以达到对频谱做某种改善的目的。但有人却误认为“补零”会提高分辨率。其理由是, 原数据长度为  $N_1$ , 补零后数据长度为  $N_2$ , 由于  $\Delta f_1 = f_s/N_1$ ,  $\Delta f_2 = f_s/N_2$  及  $N_2 > N_1$ , 因此  $\Delta f_2 < \Delta f_1$ 。实际上这是错把“计算分辨率”当成了“物理分辨率”。“补零”没有对原信号增加任何新的信息, 因此不可能提高分辨率。

由傅里叶变换理论知道, 持续时间有限的信号, 它的频谱一定无限宽。如果用 DFT 分析连续信号的频谱, 在对连续信号抽样时, 无法满足抽样定理, 那么就会出现频谱混叠现象; 另一种情况, 当连续信号无限长或很长时, 在对连续信号抽样时, 抽样点数太多以致无法存储和计算, 需要将信号截断(加窗), 这样将导致频谱的泄漏现象。另外, 用 DFT 计算连续信号的频谱只能得到抽样点上的频谱, 而不能看到整个频谱, 这种现象称为栅栏效应。

### 9.6.1 混叠失真

频谱混叠现象在前面已经详细讨论过了, 避免混叠现象的唯一办法是保证抽样频率足够高, 这就要求对待分析信号的带宽有所了解。通常是用低通滤波器将连续信号进行预滤波, 滤除幅度较小的高频分量, 低通滤波器的通带截止频率就可以认为是此信号的最高频率  $f_c$ 。为避免混叠现象要求抽样频率满足

$$f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_c$$

$$T \leq \frac{1}{2f_c} \quad (9.33)$$

$T$  为抽样间隔;  $f_s/2$  也称折叠频率。

不能满足这些要求, 将会产生频谱混叠, 称为混叠失真。

将式(9.33)代入式(9.32), 可得

$$\Delta f \geq \frac{2f_c}{N} \quad (9.34)$$

从式(9.34)看出, 信号的最高频率  $f_c$  与频率分辨率之间存在矛盾。增加  $f_c$ , 可减少混叠失

真,但在相同抽样点数  $N$  的情况下,频率分辨率下降。同理,为提高频率分辨率,在相同抽样点数情况下,需要降低  $f_c$ ,造成混叠失真的加剧。

要提高频率分辨率就要增加信号记录时间,在抽样间隔不变的情况下,抽样点数  $N$  就要增加,也就是 DFT 的点数增加,存储量和计算量都会增加。在给定  $f_c$  和  $\Delta f$  的情况下,抽样点数

$$N \geq \frac{2f_c}{\Delta f}$$

这是在未采用加窗处理情况下,为实现基本 DFT 算法必须满足的最低条件。如采用加窗处理,会使频谱展宽,使频率分辨率下降。为保证分辨率,抽样点数  $N$  还要增加。

**【例 9.6.1】** 用 DFT 对模拟信号进行谱分析。不采用加窗处理。若要求(1) 频率分辨率  $\Delta f \leq 5\text{Hz}$ ; (2) 信号的最高频率分量  $f_h = 2.5\text{kHz}$ 。试确定信号的最小记录时间  $t_{\text{pmin}}$ , 最大抽样间隔  $T_{\text{max}}$ , 最少抽样点数  $N_{\text{min}}$ 。

**解:** 由式(9.32)可知,信号的最小记录时间  $t_{\text{pmin}} = NT = \frac{1}{\Delta f}$ , 可以得到

$$t_{\text{pmin}} = \frac{1}{5} = 0.2\text{s}$$

由抽样定理,  $f_s \geq 2f_h$ , 可以得到

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{5}\text{ms} = 0.2\text{ms}$$

最少抽样点数

$$N_{\text{min}} = \frac{t_{\text{pmin}}}{T_{\text{max}}} = \frac{0.2\text{s}}{0.2\text{ms}} = 1000$$

## 9.6.2 频谱泄漏

用 DFT 进行谱分析,要把观测的信号  $x(n)$  限制在有限时宽之内,即采取时域加窗处理。加窗后信号为原信号与窗函数相乘的结果。时域两函数相乘,在频域是信号频谱和窗函数频谱的卷积。由于窗函数不可能取无限宽,即其频谱不可能为理想的冲激函数,信号的频谱与窗函数的卷积必然产生频谱展宽,造成信号频谱的泄漏。泄漏现象的产生是因为信号被截断成为有限长信号。

**【例 9.6.2】** 设信号为  $x(n) = 1/2\pi$  是一直流信号,经过矩形窗函数截断,求该直流信号经过矩形窗函数前后的频谱函数。

**解:** 设信号经过矩形窗函数后的信号为  $x_1(n)$ , 其频谱函数为  $X_1(e^{j\Omega})$ , 矩形窗函数为  $w(n)$ , 其频谱函数为  $W(e^{j\Omega})$ , 则时域相乘结果为

$$x_1(n) = x(n)w(n)$$

相应的频域卷积结果为

$$X_1(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega})$$

显然,  $X_1(e^{j\Omega}) \neq X(e^{j\Omega})$ , 相当于  $X(e^{j\Omega})$  失真, 这种失真由于  $X(e^{j\Omega})$  的频谱泄漏引起, 其现

象为频谱出现展宽。

$x(n)$  的频谱为  $X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega)$ , 如图 9.18(a) 所示。矩形窗函数  $w(n)$ , 其频谱函数为  $W(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{M-1}{2}\Omega} \frac{\sin(M\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}$ , 式中,  $M$  为矩形窗的长度。经过频域卷积, 可得  $x_1(n)$  的频谱函数  $X_1(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega}) = W(e^{j\Omega})$ , 如图 9.18(b) 所示。

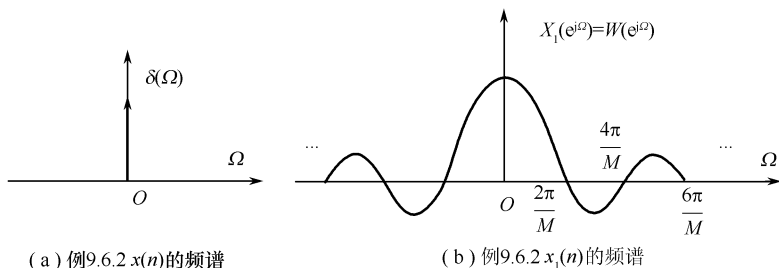


图 9.18 例 9.6.2 图

由图可以看出,  $X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega)$  是以  $\Omega = 0$  为中心的一根谱线, 变成了  $X_1(e^{j\Omega})$  形状的连续频谱; 即频谱成分从  $\Omega = 0$  处“泄漏”到其他频率处。

在进行 DFT 运算时, 时域加窗是必须的, 因此泄漏现象是离散傅里叶变换所固有的, 无法消除, 只能抑制。抑制的方法是不用矩形窗而改用其他函数作为窗函数, 从而使波动幅度减小, 减少泄漏。进一步的讨论将在后面的章节进行。

### 9.6.3 栅栏效应

用 DFT 计算的频谱只限制在基频的整数倍处, 而没有计算整个频谱, 因此能够得到的只有抽样点  $\Omega = \frac{2\pi}{N}k$  处的频率特性, 而不能得到连续的频谱函数。这就好像是通过一个“栅栏”来观看一个图像, 只能看到栅栏处的真实图像。这就是所谓的“栅栏效应”。如果在两个离散的谱线之间有一个特别大的频谱分量, 就无法检测出来了。

减少这种效应的一个方法就是补零 DFT。可通过不改变原有的记录长度, 对抽样序列补零加长, 使 DFT 计算的点数增加。这样通过 DFT 计算的频谱线更密了, 即使谱线细化, 可以看到更精细的图像, 但对抽样序列补零加长并未提高频率分辨率。要提高频率分辨率, 必须增加抽样点数, 即增加记录长度, 这样同样可以减小“栅栏”的宽度, 看到更多真实的频率特性。

## 习 题 九

9.2-1 求下列序列的 DFT

(1)  $\{1, 1, -1, -1\}$ ;

(2)  $\{1, j, -1, -j\}$ ;

(3)  $x(n) = a^n \quad 0 \leq n \leq N-1$ ;

(4)  $x(n) = \sin(2\pi n/N) \quad 0 \leq n \leq N-1$

9.2-2 若一连续信号为  $x_a(t) = \cos(4\pi t)$ , 以  $f_s = 8\text{Hz}$  的频率对其抽样, 得到离散序列  $x(n)$ 。试求  $x(n)$  的 8 点 DFT  $X(k)$ , 并画出  $X(k)$  的简图。

9.3-1 若  $x(n) = R_4(n)$ , 求  $x(n)$  的  $z$  变换  $X(z)$ , 频率函数  $X(e^{j\Omega})$  和离散傅里叶变换  $X(k)$ ,

并画出频率函数  $X(e^{j\Omega})$  和离散傅里叶变换  $X(k)$  的幅频特性图。

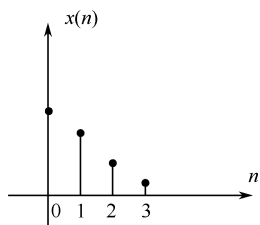


图 9.19 习题 9.5-2 图

9.5-1 有限长序列  $x(n)$  如题图 9.19 所示,画出序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的波形。

$$x_1(n) = x((n-3))_6 R_6(n), x_2(n) = x((-n))_5 R_5(n)。$$

9.5-2 已知序列  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  分别为  $x_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$ ,  $x_2(n) = R_4(n)$ ,求  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的 6 点圆周卷积。

9.5-3 设  $x(n)$  的长度为  $N$ ,其离散傅里叶变换为  $Y(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ 。现将长度扩大  $r$  倍,得到

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}, Y(k) = \text{DFT}[y(n)], 0 \leq k \leq rN-1。$$

推导  $Y(k)$  与  $X(k)$  的关系。

9.5-4 设  $x(n)$  的长度为  $N$ ,其离散傅里叶变换为  $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ 。现将  $x(n)$  的每两点间补进  $r-1$  个零值,得到

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, Y(k) = \text{DFT}[y(n)], 0 \leq k \leq rN-1。$$

推导  $Y(k)$  与  $X(k)$  的关系。

9.5-5 已知  $f(n) = x(n) + jy(n)$ ,  $x(n)$  和  $y(n)$  是长为  $N$  的实序列,若  $F(k) = \text{DFT}[f(n)] = 1 + 0.5j$ ,试求  $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$  和  $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$ 。

9.7-1 用 DFT 对实信号进行谱分析,要求频率分辨率  $F \leq 50\text{Hz}$ ,信号最高频率为  $f_{\max} = 1000\text{Hz}$ ,试确定以下参数:

- (1) 最小记录时间;
- (2) 最大抽样间隔;
- (3) 最少抽样点数;
- (4) 若要求频率分辨率提高一倍,求最少抽样点数。

## 第 10 章 快速傅里叶变换

离散傅里叶变化(DFT)和卷积是信号处理中两个最基本也是最常用的运算,它们涉及信号与系统的分析与综合这一广泛信号处理领域。由第 9 章的讨论可知,卷积可转化为 DFT 来实现,其他许多算法,如相关、滤波、谱估计等也可以化为 DFT 来实现。DFT 在系统分析、设计、数字信号处理中起着重要的作用。

对  $N$  点序列  $x(n)$ ,其 DFT 变换对定义为

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

显然,求出  $N$  点  $X(k)$  需要  $N^2$  次复数乘法及  $N(N-1)$  次复数加法。众所周知,实现一次复数乘,需要 4 次实数乘和两次复数加,实现一次复数加则需要两次复数加。当  $N$  很大时,其计算量是相当可观的。例如,若  $N = 1024$ ,则需要 1048576 次复数乘法,即 4194304 次实数乘法。所需时间过长,难于“实时”实现。对于二维图像处理,所需的计算量更是大得惊人。

由于 DFT 的运算量过大,很多年来一直没得到应用。直到 1965 年由 J. W. Cooley 和 J. W. Tukey 提出并完善了快速傅里叶算法(Fast Fourier Transform, FFT),使  $N$  点 DFT 的乘法计算量由  $N^2$  次降为  $\frac{N}{2} \log_2 N$  次,大大简化了运算。仍以  $N = 1024$  为例,计算量降为 5120 次,仅为原来的 4.88%。因此,这一重要发现被公认为是数字信号处理发展史上的一个转折点,也可以称为一个里程碑。以此为契机,加之超大规模集成电路(VLSI)和计算机的飞速发展,使得数字信号处理在过去的几十年中获得了飞速的发展,并广泛应用于众多的技术领域,显示了这一学科的巨大生命力。

自从 Cooley-Tukey 的算法提出之后,多年来许多科学家致力于对 DFT 快速算法的研究,提出了多种快速运算方案。经过不断改进,DFT 的运算效率大大提高。正是由于各种快速算法的推出,使得许多复杂的、实时性要求高的系统实现成为可能,极大地推动了数字信号处理技术的发展。我们把各种 DFT 的快速算法统称为快速傅里叶变换。

总的来说,快速傅里叶变换的发展方向有两个,一是针对  $N$  等于 2 的整数次幂的算法,如基 2 算法、基 4 算法、实因子算法和分裂基算法等;另一个是  $N$  不等于 2 的整数次幂的算法,它是以 Winograd 为代表的一类算法(素因子算法、Winograd 算法)。

可以证明,基 4 算法比基 2 算法更有效。1984 年提出的分裂基(split-radix)算法同时使用基 2 和基 4 算法,这种算法被认为是目前对  $N$  等于 2 的整数次幂的各类算法中最为理想的一种。

Winograd 算法(WFTA)和上述算法在理论上有着根本的差别,它是建立在下表映射和数论上的一套完整新颖的算法。在实际应用上,所需乘法次数比 Cooley-Tukey 算法有了明显的减少,因此被认为是对 FFT 算法的一大贡献。但 WFTA 理论上比较复杂,编程也较为困难,数



据的长度也受到较大的限制,在程序中,数据所占的内存及数据的传递次数也比 Cooley-Tukey 算法增加了很多。当执行一个乘法指令和执行一个加法指令所需的时间不是差很多,而数据传递的时间相对于运算时间也不能忽略不计时,WFTA 是否还具有突出的优点已经受到人们的质疑。

本章中通过对 DFT 的算法特点的分析,来说明改进算法的方法和 FFT 算法的原理。重点以基 2 算法为例进行分析。

## 10.1 改进 DFT 计算的方法

### 10.1.1 直接计算 DFT 的特点

根据定义,长度为  $N$  的有限长序列  $x(n)$  的 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10.1)$$

由式(10.1)看出 DFT 的计算中只包含乘法和加法运算。如果  $x(n)$  为复数序列,则根据式(10.1)完成  $N$  点  $X(k)$  的运算次数分析如表 10.1 所示。

表 10.1  $N$  点 DFT 的运算量分析

	一个 $k$	全部 $k$
复数乘	$N$	$N \times N$
复数加	$N-1$	$N(N-1)$

当  $N \gg 1$  时,加法次数  $(N-1)N \approx N^2$ 。

所以  $N$  点 DFT 的乘法和加法次数均与  $N^2$  成正比。当  $N$  较大时,计算次数相当可观。比如,  $N = 1024$  时,就需要超过 100 万次的复数乘法和加法。

复数运算是由实数运算来完成的,因此式(10-1)可以写成

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} [\operatorname{Re}x(n) + j\operatorname{Im}x(n)][\operatorname{Re}W_N^{nk} + j\operatorname{Im}W_N^{nk}] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [(\operatorname{Re}x(n) \cdot \operatorname{Re}W_N^{nk} - \operatorname{Im}x(n) \cdot \operatorname{Im}W_N^{nk}) + \\ &\quad j(\operatorname{Re}x(n) \cdot \operatorname{Im}W_N^{nk} + \operatorname{Im}x(n) \cdot \operatorname{Re}W_N^{nk})] \end{aligned} \quad (10.2)$$

可见,一次复数乘法包括了四次实数乘法和二次实数加法;一次复数加法则需要二次实数加法。所以对某一  $k$  值,计算  $X(k)$  需要  $4N$  次实数乘法  $2N + 2(N-1) = 2(2N-1)$  次实数加法。一个完整的  $N$  点 DFT 运算共需要  $4N^2$  次实数乘法和  $2N(2N-1)$  次实数加法。当  $N$  较大时,计算 DFT 需要消耗大量的时间,很难满足系统的实时性要求。所以改进 DFT 算法,提高运算效率是非常必要的。

### 10.1.2 减少运算量的方法

根据上述分析,DFT 的运算量与序列长度的平方成正比。所以如果把一个长序列分成若

干段短序列进行 DFT 计算,一定可以减小运算次数。快速傅里叶变换 FFT 算法正是基于这种思想发展起来的。

观察 DFT 运算可以看出,利用旋转因子  $W_N^{nk}$  的特点,可以减少 DFT 的运算次数。 $W_N^{nk}$  有如下特性。

(1) 对称性:

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk} \quad (10.3)$$

(2) 周期性:

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)} \quad (10.4)$$

(3) 可约性:

$$\text{当 } N = rM \quad W_N^r = W_{N/r}^1 = W_M^1 \quad (r, M \text{ 为整数}) \quad (10.5)$$

(4) 特殊值:

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \quad W_N^0 = 1 \quad W_N^{\frac{N}{2}} = -1 \quad W_N^{\frac{N}{4}} = -j \quad (10.6)$$

利用这些特性,可以使 DFT 运算中的有些项可以进行合并。正是充分利用  $W_N^{nk}$  的对称性和周期性,实现了快速运算。基 2FFT 的算法主要分为两大类,即时间抽取法(Decimation In Time, DIT) 和频率抽取法(Decimation In Frequency, DIF)。

## 10.2 按时间抽取(DIT)的 FFT 算法

为提高运算速度,将 DFT 的计算逐次分解成较小点数的 DFT。如果算法是通过逐次分解时间序列  $x(n)$  得到的,这种算法称为**按时间抽取(Decimation In Time, DIT)FFT 算法**,又称为**库利-图基算法**。

### 10.2.1 算法原理

设序列长度为  $N = 2^M$  ( $M$  为整数)。如果给定长度不满足这个条件,可以通过补零满足要求。这种长度  $N$  为 2 的整数幂的 FFT,称为**基 2-FFT**。

将  $N = 2^M$  的序列  $x(n)$ ,按  $n$  的奇偶数分为两组,即

$$\left. \begin{aligned} x_1(r) &= x(2r) \\ x_2(r) &= x(2r+1) \end{aligned} \right\} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=\text{偶}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n=\text{奇}} x(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)(W_N^2)^{rk} \end{aligned}$$

利用式(10.5),由于  $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N^2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$ ,所以上式可表示为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \end{aligned} \quad (10.7)$$

式中,  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$  分别为  $x_1(r)$  和  $x_2(r)$  的  $N/2$  点 DFT, 即

$$X_1(k) = \text{DFT}\{x_1(r)\} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} \quad (10.8)$$

$$X_2(k) = \text{DFT}\{x_2(r)\} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r) W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk} \quad (10.9)$$

由式(10.7)可以看出, 一个  $N$  点 DFT 被分解成了两个  $N/2$  点的 DFT 的组合。 $X_1(k)$  和  $X_2(k)$  都以  $N/2$  为周期。而  $X(k)$  却是以  $N$  为周期。所以用式(10.7) 计算得到的只是  $X(k)$  的前一半结果, 即  $0 \sim N/2$  点的  $X(k)$ 。如果要用  $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$  表达全部  $X(k)$  的话, 需要根据旋转因子的周期性即  $W_{N/2}^{k+\frac{N}{2}} = W_{N/2}^k$  可得

$$X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{r(k+N/2)} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r) W_{N/2}^{rk} = X_1(k) \quad (10.10)$$

同理

$$X_2\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_2(k) \quad (10.11)$$

式(10.10) 和式(10.11) 说明, 后一半的  $k$  值( $N/2 \sim N-1$ ) 对应的  $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$  与前一半  $k$  值( $0 \sim N/2-1$ ) 对应的  $X_1(k)$ 、 $X_2(k)$  值相等。

再考虑到  $W_N^k$  的对称性

$$W_N^{(N/2+k)} = W_N^{N/2} W_N^k = -W_N^k \quad (10.12)$$

把式(10.10) ~ 式(10.12) 代入式(10.7) 就可得出前、后两半的  $X(k)$ , 即

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad (10.13)$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1 \quad (10.14)$$

这样只要求出区间  $0 \sim \frac{N}{2}-1$  的所有  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$ , 就可得到  $0 \sim N-1$  区间的全部  $X(k)$  值。

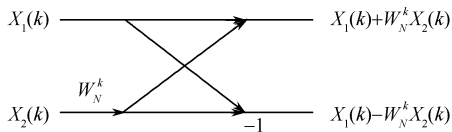
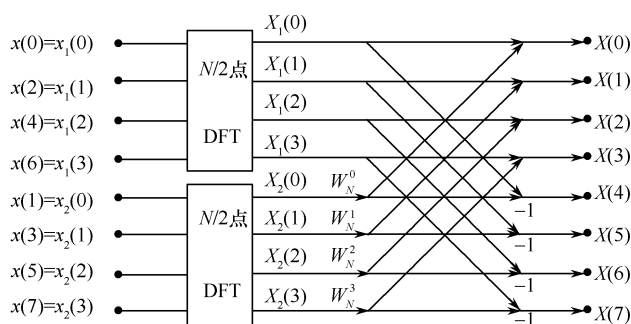


图 10.1 蝶形运算符号

式(10.13) 和式(10.14) 的运算关系可以用图 10.1 所示的信号流图进行表示。根据其形状又称其为**蝶形运算单元**。图中左侧  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$  为输入, 右侧为输出。可以看出, 每个蝶形运算单元, 需要一次复数乘法及两次复数加(减)法。

采用这种表示法, 可将上述分解运算表示于图 10.2 中。此图表示  $N = 8 = 2^3$  时的情况, 其中输出  $X(0) \sim X(3)$  由式(10.13) 给出, 而  $X(4) \sim X(7)$  则由式(10.14) 给出。

由图 10.1 看出, 完成一个蝶形运算需要一次复数乘法和两次复数加法。因此, 一次分解后, 计算一个  $N$  点 DFT 共需计算两个  $N/2$  点 DFT 和  $N/2$  个蝶形运算。所需计算次数如表 10.2 所示。从表中看出, 一次分解后, 总的复数乘法次数为  $N(N+1)/2 \approx N^2/2$ , 加法为  $N^2/2$  次, 运算工作量减少了几近  $1/2$ 。

图 10.2  $N$  点 DFT 的一次时域抽取分解图表 10.2 一次分解后  $N$  点 DFT 的运算量分析

	$N/2$ 点 DFT 次数	蝶形运算次数	总运算次数
复乘	$2 \times \left(\frac{N}{2}\right)^2 = N^2/2$	$\left(\frac{N}{2}\right) \times 1 = \frac{N}{2}$	$\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} = \frac{N}{2}(N+1)$
复加	$2 \times \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1\right) = N \left(\frac{N}{2} - 1\right)$	$\left(\frac{N}{2}\right) \times 2 = N$	$N \left(\frac{N}{2} - 1\right) + N = \frac{N^2}{2}$

可见一次分解对减少 DFT 的运算量是十分有效的。可以按照此方法继续对序列进行分解。由于  $N = 2^M$ , 故  $N/2$  仍为偶数, 进一步把  $N/2$  点子序列再按奇、偶部分分解为两个  $N/4$  点的子序列, 即

$$\left. \begin{aligned} x_3(l) &= x_1(2l) \\ x_4(l) &= x_1(2l+1) \end{aligned} \right\} \quad l = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \text{DFT}[x_1(l)] = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l) W_{N/2}^{lk} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l) W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l+1) W_{N/2}^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} \\ &= X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k) \quad k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \end{aligned} \quad (10.16)$$

式中

$$\begin{aligned} X_3(k) &= \text{DFT}[x_3(l)] = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_3(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l) W_{N/4}^{lk} \\ X_4(k) &= \text{DFT}[x_4(l)] = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_4(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_1(2l+1) W_{N/4}^{lk} \end{aligned}$$

同一次分解时情况一样, 根据周期性  $X_3(k) = X_3(k + N/4)$ ,  $X_4(k) = X_4(k + N/4)$  和对称性  $W_{N/2}^{k+N/4} = -W_{N/2}^k$ , 可以得到

$$\left. \begin{aligned} X_1(k) &= X_3(k) + W_{N/2}^k X_4(k) \\ X_1\left(k + \frac{N}{4}\right) &= X_3(k) - W_{N/2}^k X_4(k) \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (10.17)$$

同理将  $x_2(l)$  进行奇、偶分解为

$$\left. \begin{aligned} x_5(l) &= x_2(2l) \\ x_6(l) &= x_2(2l+1) \end{aligned} \right\} l = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

可得到

$$\left. \begin{aligned} X_2(k) &= X_5(k) + W_{N/2}^k X_6(k) \\ X_2\left(k + \frac{N}{4}\right) &= X_5(k) - W_{N/2}^k X_6(k) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (10.18)$$

式中

$$X_5(k) = \text{DFT}[x_5(l)] = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_5(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_2(2l) W_{N/4}^{lk}$$

$$X_6(k) = \text{DFT}[x_6(l)] = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_6(l) W_{N/4}^{lk} = \sum_{l=0}^{N/4-1} x_2(2l+1) W_{N/4}^{lk}$$

二次分解后,一个  $N/2$  点 DFT 分解成了两个  $N/4$  点 DFT 和  $N/4$  个蝶形运算,如图 10.3 所示。

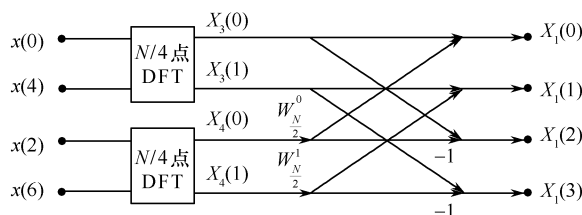


图 10.3  $N/2$  点 DFT 分解为两个  $N/4$  点 DFT 的信号流程图

依次类推,对一个长度为  $N = 2^M$  的序列,经过  $M-1$  次分解, $N$  点 DFT 最终可分解为  $N/2$  个两点 DFT。根据式(10.5) 可将  $W_{N/2}^0, W_{N/2}^1$  表示为  $W_N^0, W_N^2$ 。这样当  $N = 2^3 = 8$  时,二次分解后的信号流程图如图 10.4 所示。

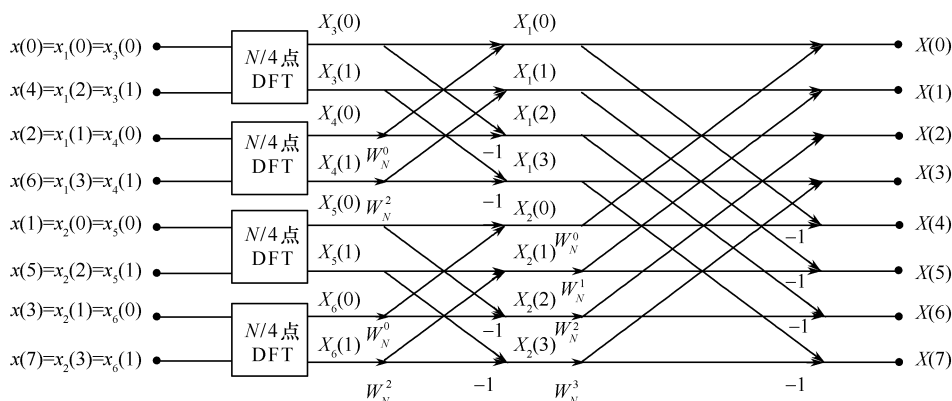


图 10.4 一个  $N = 8$  点 DFT 分解为 4 个  $N/4$  点 DFT 的信号流程图

根据上面的分析可知,二次分解后的运算量比一次分解的运算量又减少了大约  $1/2$ 。

最后,两点 DFT 可表示为一个蝶形运算。例如,

$$X_3(0) = \sum_{l=0}^1 x_3(l) W_2^{l0} = x_3(0) + x_3(1) = x(0) + W_2^0 x(4)$$

$$X_3(1) = \sum_{l=0}^1 x_3(l) W_2^l = x_3(0) + W_2^1 x_3(1) = x(0) - W_2^0 x(4)$$

图 10.5 给出了一个 8 点 DFT 的全部分解过程的运算流图。

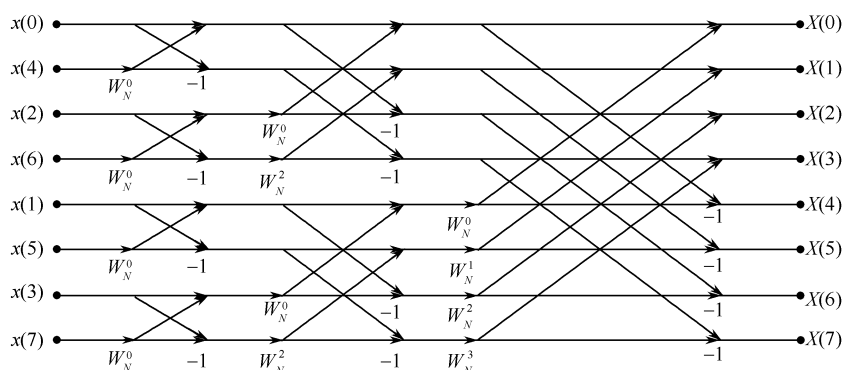


图 10.5  $N = 8$  的时间抽取法 FFT 流图

显然,这种方法每一次分解都是按输入序列在时域上的次序是偶数还是奇数来抽取的,故得名“按时间抽取法”。

### 10.2.2 时间抽取 FFT 的运算量

由 8 点时间抽取 FFT 流图可见,一个  $N = 2^M$  点序列的 DFT 经过  $M$  次分解,可以分解成  $M$  级蝶形运算,每一级都由  $N/2$  个蝶形运算组成。因此全部  $N$  点的 FFT 共有  $\frac{N}{2} \times M$  个蝶形运算。每个蝶形运算需要一次复数乘法和二次复数加法运算。所以  $N$  点的 FFT 所需的运算次数如下。

复数乘法: 
$$\frac{N}{2} \times M = \frac{N}{2} \log_2 N$$

复数加法: 
$$NM = N \log_2 N$$

而直接计算 DFT 需要  $N^2$  次复数乘法和  $N(N-1)$  次复数加法。

当  $N \gg 1$  时,  $\frac{N}{2} \log_2 N \ll N^2$ 。可见,采用时域抽取法 FFT 的运算次数比直接计算 DFT 的运算次数大大减少。表 10.3 中列出了直接 DFT 算法和基 2FFT 算法的比较结果。

表 10.3 FFT 算法与直接算法比较

运算次数 序列长度 $N$	DFT		FFT		比 较
	乘法 $N^2$	加法 $N(N-1)$	乘法 $N/2 \log_2 N$	加法 $N \log_2 N$	$N^2 / \frac{N}{2} \log_2 N$
2	4	2	1	2	4
8	64	56	12	24	5.4
32	1024	992	80	160	12.8
64	4096	4032	192	384	21.3

(续表)

运算次数 序列长度 $N$	DFT		FFT		比 较
	乘法 $N^2$	加法 $N(N-1)$	乘法 $N/2\log_2 N$	加法 $N\log_2 N$	$N^2 / \frac{N}{2}\log_2 N$
256	65536	65280	1024	2048	64
1024	1048576	1048576	5120	10240	204.8
2048	4194304	4192256	11264	22528	372.4
$2^{20}$	$\approx 10^{12}$	$\approx 10^{12}$	$\approx 10^7$	$\approx 2 \times 10^7$	$\approx 10^5$

当然,实际计算量略有不同,因为有些特殊系数如  $W_N^0 = 1, W_N^{\frac{N}{2}} = -1, W_N^{\frac{N}{4}} = -j$  等不需要乘运算。当  $N \sim 1$  时,这些特殊情况相对较少,可不考虑。从表 10.3 中看出,当  $N$  较大时,FFT 比直接计算 DFT 要快几个数量级。例如  $N = 2048$ ,直接计算要用 3 小时,而 FFT 算法只要不到 1 分钟。FFT 算法在计算 DFT 上确实高效快速。

### 10.2.3 时间抽取法的运算特点

由 8 点时间抽取 FFT 流图可见,这种运算是很有规律的,有很多的特点。

#### 1. 蝶形运算

一个  $N = 2^M$  点序列的 DFT 经过  $M$  次分解,全部运算都变为蝶形运算。所以说蝶形运算是 FFT 运算的核心。FFT 的运算实际上是对蝶形图的运算。全部蝶形运算分为  $M$  级。每一级都有  $N/2$  个蝶形运算。全部  $N$  点 FFT 运算由  $\frac{N}{2} \times M$  蝶形运算组成。每个蝶形运算单元完成下述基本递推运算:

$$\begin{aligned} X_m(p) &= X_{m-1}(p) + W_N^r X_{m-1}(q) \\ X_m(q) &= X_{m-1}(p) - W_N^r X_{m-1}(q) \end{aligned} \quad (10.19)$$

式中,  $m$  表示第  $m$  列递推,  $p, q$  为数据所在行数。式(10.19)的蝶形运算如图 10.6 所示,由一次复数乘法和两次复数加(减)法组成。

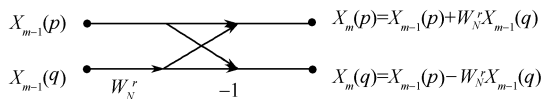


图 10.6 时间抽取蝶形运算结构

#### 2. 原位运算

观察一个完整的 FFT 运算流图,可以看出每个蝶形运算的输入和输出并不交叉。任何一个蝶形运算的两个输入经过蝶形运算后就失去了利用价值,不再需要保存,因此可以实现原位运算。原位运算就是将蝶形运算的结果仍然保存在原输入量的存储单元中。即某一列的  $N$  个数据送到存储器后,经蝶形运算,其结果为另一列数据,它们以蝶形为单位仍存储在这一组存储器中,直到最后输出,中间无需其他存储器。每列的  $N/2$  个蝶形运算全部完成后,再开始下一列的蝶形运算。这样存储数据只需  $N$  个存储单元。下一级的运算仍采用这种原位方式,只不过进入蝶形的组合关系有所不同。原位运算的结构可以节省大量内存,降低设备成本。

### 3. 倒位序

对于原位运算结构,运算完成后的输出结果仍按照自然顺序存放。由于要对输入  $x(n)$  逐次进行奇、偶分解,结果导致了输入序列的重新排序。因此在时域抽取法中,输入序列是按码位倒序存放的,输出则按自然顺序存放。

所谓倒位序,就是将二进制数的最高有效位到最低有效位的位序进行颠倒排列而得到的二进制数。倒位序的二进制数通常又称倒序数。例如  $N = 8$  时,  $n = (001)_2$  的倒序数为 4。而  $N = 16$  时,  $n = (0001)_2$  的倒序数为 8。可见倒序数与码长(即  $N$ ) 有关。 $N = 8$  时,码位倒序说明如图 10.7 所示。

输入数据按码位倒序的顺序存放是原位运算结构的时域抽取基 2FFT 算法的必然结果。结合时域抽取的分解过程,可用一个二进制树状图(如图 10.8 所示)来表示序列标号的变化。第一次分解时将序列  $x(n)$  分成了偶数部分(即上半部分)和奇数部分(即下半部分),如图 10.8 所示。观察序列标号的二进制编码的最低位  $n_0$ ,当  $n_0 = 0$  时,对应偶数组序列,当  $n_0 = 1$  时,对应奇数组序列。第二次分解按次低位  $n_1$  为 0 或 1 来分偶数、奇数组序列, $n_1 = 0$  表示偶数组, $n_1 = 1$  表示奇数组。依次类推,最终按位归类排列就可得到码位倒序的排列顺序。

二进制编码	码位倒序	解码
$x(0) \longrightarrow x(000)$	$\longrightarrow x(000)$	$\longrightarrow x(0)$
$x(1) \longrightarrow x(001)$	$\longrightarrow x(100)$	$\longrightarrow x(4)$
$x(2) \longrightarrow x(010)$	$\longrightarrow x(010)$	$\longrightarrow x(2)$
$x(3) \longrightarrow x(011)$	$\longrightarrow x(110)$	$\longrightarrow x(6)$
$x(4) \longrightarrow x(100)$	$\longrightarrow x(001)$	$\longrightarrow x(1)$
$x(5) \longrightarrow x(101)$	$\longrightarrow x(101)$	$\longrightarrow x(5)$
$x(6) \longrightarrow x(110)$	$\longrightarrow x(011)$	$\longrightarrow x(3)$
$x(7) \longrightarrow x(111)$	$\longrightarrow x(111)$	$\longrightarrow x(7)$

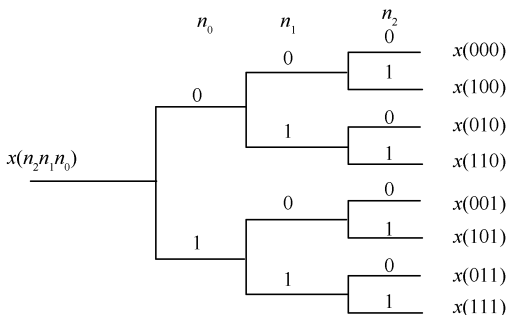


图 10.8 倒序位树状说明

图 10.7 倒位序说明

所以要实现 FFT 算法,首先必须把按自然顺序存放的数据  $x(n)$  变换成按倒序存放。这一过程称为整序。整序的过程如图 10.9 所示。对  $N = 8$ ,原输入数据按自然顺序存放在  $A(0) \sim A(7)$  的存储单元中,经过整序,使存储单元存入相应的倒序位数据。图 10.9 说明了序列整序的功能要求。

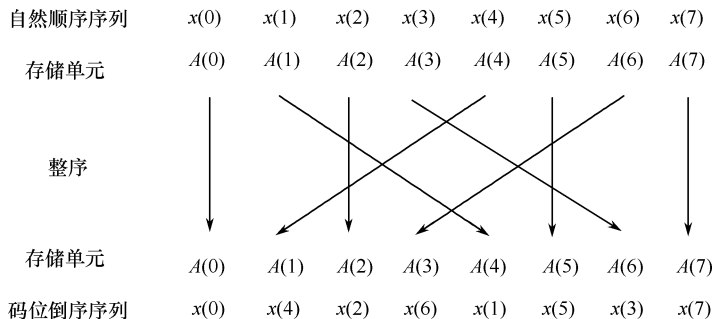


图 10.9 序列的整序说明



#### 4. 蝶形运算两节点间距离

以 8 点 FFT 流图为例,其输入是倒位序的,输出为正常位序。其第一级(第一列)每个蝶形的“距离”(  $p, q$  间距)为 1,第二级为 2,第三级为 4,依次类推。对于  $N = 2^M$  时间抽取 FFT,第  $m$  级运算,节点间距离为  $2^{m-1}$ 。这样,第  $m$  级蝶形运算可写成

$$\begin{aligned} X_m(p) &= X_{m-1}(p) + W_N^r X_{m-1}(p + 2^{m-1}) \\ X_m(p + 2^{m-1}) &= X_{m-1}(p) - W_N^r X_{m-1}(p + 2^{m-1}) \end{aligned}$$

#### 5. $W_N^r$ 的确定

在时域抽取法的 FFT 运算流图中,每一级都有  $N/2$  个蝶形运算,每个蝶形运算都要乘以旋转因子  $W_N^k$ 。每一级旋转因子都不相同,但排列却很有规律,如表 10.4 所示。

表 10.4 旋转因子规律

分级	旋转因子及等效表示
第 1 级	$W_N^2, r = 0$
第 2 级	$W_N^4, r = 0$
第 3 级	$W_N^8, r = 0, 1, 2, 3$
$\vdots$	$\vdots$
第 $M$ 级	$W_N^r, r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

## 10.3 按频率抽取(DIF)的 FFT 算法

这里讨论另一种 FFT 算法,称为按频率抽取(DIF)的 FFT 算法。它是把输出序列  $X(k)$  按其顺序的奇偶分解为越来越短的序列。

### 10.3.1 算法原理

对于长度为  $N = 2^M$  的序列  $x(n)$ ,将  $x(n)$  按  $n$  的顺序前后对半分解,得到两个子序列。这样可以将  $N$  点 DFT 表示成前后两部分。

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{k(n+N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + W_N^{kN/2} x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (10.20)$$

当  $k = \text{偶数}$  时, 即  $k = 2r, r = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ , 有

$$\begin{aligned} X(k) = X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2rn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^m \end{aligned} \quad (10.21)$$

当  $k = \text{奇数}$  时, 即  $k = 2r + 1$ , 则

$$\begin{aligned} X(k) = X(2r + 1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{(2r+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \cdot W_{N/2}^m \end{aligned} \quad (10.22)$$

令

$$\begin{cases} x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ x_2(n) = \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (10.23)$$

将式(10.23)代入式(10.21)和式(10.22), 可得

$$\begin{cases} X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^m = X_1(r) \\ X(2r + 1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^m = X_2(r) \end{cases} \quad r = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (10.24)$$

$X_1(r)$  和  $X_2(r)$  分别是  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的  $N/2$  点 DFT。 $X_1(r)$  和  $X_2(r)$  分别对应于  $N$  点 DFT 的偶数部分和奇数部分。因此  $N$  点  $X(k)$  按  $k$  值分为偶、奇两组。偶数组为  $x_1(n)$  的 DFT, 奇数组为  $x_2(n)$  的 DFT。而  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  为  $N/2$  点序列, 可以通过对前后两半的输入序列按式(10.23)进行组合得到。式(10.23)的运算关系可用图 10.10 所示的蝶形运算来表示。

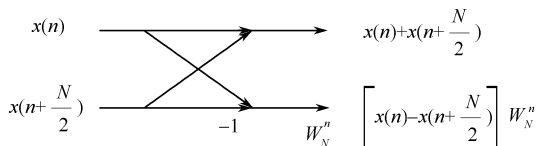
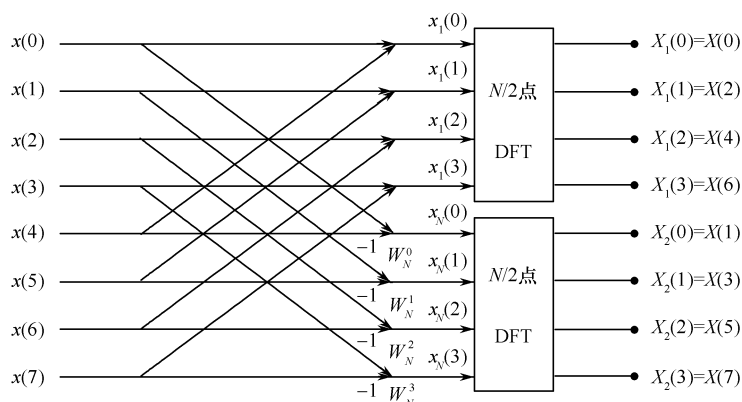
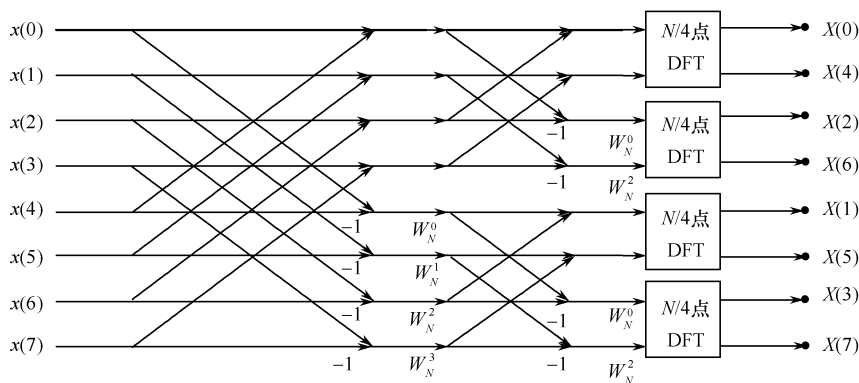
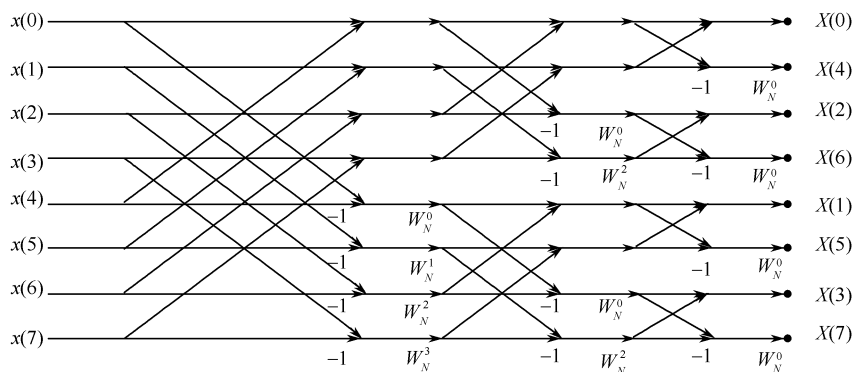


图 10.10 按频率抽取蝶形运算流程图符号

这样, 我们就把一个  $N$  点 DFT 按  $k$  的奇偶分解为两个  $N/2$  点的 DFT (如式 10.24 所示)。  $N = 8$  时, 上述分解过程如图 10.11 所示。

与时间抽取法一样, 由于  $N = 2^M$ , 一次分解后,  $N/2$  仍为偶数, 因此仍可按上述方法继续分解, 直到最后剩下全部是两点 DFT, 而两点 DFT 也可用图 10.10 所示的蝶形运算表示。二次分解流程图如图 10.12 所示。图 10.13 表示了一个完整的频率抽取法的 FFT ( $N = 8$ )。

图 10.11  $N$  点 DFT 的一次频率抽取分解图图 10.12 一个  $N = 8$  点 DFT 分解为 4 个  $N/4$  点 DFT图 10.13  $N = 8$  的频率抽取法 FFT 流程图

由图 10.13 可见,按频率抽取法,一个  $N = 2^M$  点序列的 DFT 经过  $M$  次分解,可以分解成  $M$  级蝶形运算,每一级都由  $N/2$  个蝶形运算组成。因此全部  $N$  点的 FFT 共有  $\frac{N}{2} \times M$  个蝶形运算。每个蝶形运算需要一次复数乘法和二次复数加法运算。所以频率抽取法运算量与时间抽取法相同,都需要复数乘法  $\frac{N}{2} \times M = \frac{N}{2} \log_2 N$  次,复数加法:  $NM = N \log_2 N$  次。

### 10.3.2 运算特点

频率抽取法的运算特点与时间抽取法基本相同,都是通过蝶形运算完成,也是原位运算,其输入是正常位序,输出为倒位序。

按流图转置定理,即将流图的所有支路方向取反,交换输入输出,系数保持不变,可得到流图的转置形式。观察图 10.5 所示的时间抽取流图和 10.13 所示的频率抽取流图,可以看到它们互为转置。根据转置定理,两个流图的输入输出特性相同。因此频率抽取法和时间抽取法是两种等价的 FFT 运算。

FFT 算法流图并不唯一,在上面两种 FFT 的算法流图的基础上稍作变换,可以得到其他形式的 FFT 流图。这是因为对任何流图只要保证各节点所连支路及其传输系数不变,则不论节点位置怎么排列,所得的流图总是等效的,只是数据存取的顺序有所不同。读者如有兴趣不妨试一试。

## 习 题 十

- 10.2-1 已知  $X(k)$  和  $Y(k)$  是两个  $N$  点实序列  $x(n)$  和  $y(n)$  的 DFT,若要从  $x(n)$  和  $y(n)$  求  $X(k)$  和  $Y(k)$ ,为提高运算效率,试设计用一次  $N$  点 FFT 来完成。
- 10.2-2 设  $x(n)$  是长度为  $2N$  的有限长实序列, $X(k)$  为  $x(n)$  的  $2N$  点 DFT。试设计用一次  $N$  点 DFT 完成计算  $X(k)$  的高效算法。
- 10.2-3 设  $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 、 $x_3(n)$ 、 $x_4(n)$  是四个  $N$  点实序列,且  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  是偶对称序列, $x_3(n)$  和  $x_4(n)$  是奇对称序列,试问如何通过一次 DFT 运算同时计算四个实序列的 DFT。
- 10.2-4 画出  $N = 16$  时,按时域抽取法和按频域抽取法的 FFT 流图。
- 10.2-5 假设一次复数乘法需要  $1\mu\text{s}$ ,一次复数加法需要  $0.5\mu\text{s}$ ,试计算:
  - (1) 直接计算一个 1024 点 DFT 需要多少时间?
  - (2) 计算一个 FFT 需要多少时间?

# 第 11 章 数字滤波器设计

## 11.1 数字滤波器的基本结构

在前面的章节中,已经介绍了一个一般的时域离散系统可以用不同的方法进行描述,比如:差分方程、系统函数和单位冲激响应。

例如,一个数字网络的系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (11.1)$$

从该系统函数可以很容易地得到系统的输入和输出关系,即差分方程

$$y(n) - a y(n-1) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad (11.2)$$

从系统函数还可以得到系统的单位冲激响应

$$h(n) = b_0 a^n u(n) + b_1 a^{n-1} u(n-1) \quad (11.3)$$

可把式(11.2)改写成

$$y(n) = a y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad (11.4)$$

式(11.4)提供了一个计算任意时刻输出值的递推算法。

这样一个线性系统通常又称为数字滤波器。数字滤波器的功能本质上可以说是将输入序列通过一定的运算,转换成输出序列的数字网络。数字滤波器可以按各种标准来分类,按频带可分为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器,按单位抽样响应可分为无限长单位抽样响应(IIR)滤波器和有限长单位抽样响应(FIR)滤波器,等等。

本节主要讨论数字滤波器的实现方法,即它的运算结构。运算结构是很重要的概念,在下面的讨论我们将会看到,由于运算结构的不同会影响系统的精度、误差、稳定性、经济性及运算速度等许多主要性能。我们先讨论数字滤波器的基本结构及其表示方法,然后分别介绍无限长单位抽样响应滤波器和有限长单位抽样响应滤波器的网络结构。

### 11.1.1 数字滤波器结构的表示方法

观察式(11.2)、式(11.3)和式(11.4)所表示的系统,可以发现:如果要想实现这些被描述的系统,所涉及的运算实际上是非常简单的,只有加法、乘法和单位延时三种基本运算,可以用方框图和信号流图表示算法。

数字滤波器的整个运算结构都是由基本运算单元流图(又称基本流图)组成的。对一个复杂的数字滤波器来讲,每个网络节点都连接着不同流向的信号支路。以二阶数字滤波器为例,画出其框图结构如图 11.1 所示。如果用信号流图表示,则可得结构图如图 11.2 所示。从图中可以看出框图和信号流图表示完全等效,只是符号有所不同。不过信号流图所表示的网络结构更简洁、明了。

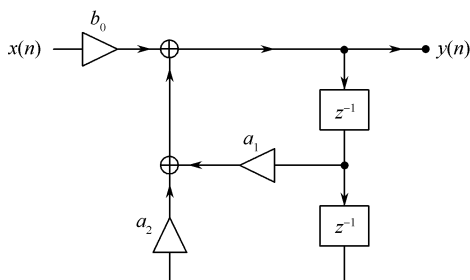


图 11.1 二阶数字滤波器的框图结构

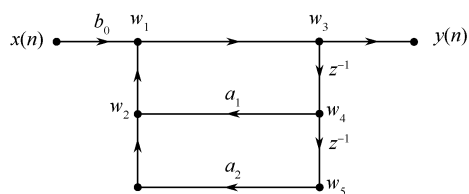


图 11.2 为图 11.1 的等效流图

在图 11.2 中,定义网络节点的节点变量为  $w_1(n) \sim w_5(n)$ 。从图中可得到节点变量的运算关系为

$$\begin{aligned} w_3(n) &= y(n) \\ w_4(n) &= w_3(n-1) = y(n-1) \\ w_5(n) &= w_4(n-1) = y(n-2) \\ w_2(n) &= a_1 w_4(n) + a_2 w_5(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) \\ w_1(n) &= b_0 x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) \end{aligned}$$

最终可得  $y(n) = w_1(n) = w_3(n) = b_0 x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)$

信号流图能清楚地表示数字滤波器的运算步骤和运算结构,今后我们只采用信号流图来表示和分析 IIR 和 FIR 数字滤波器的结构。

### 11.1.2 无限长单位抽样响应数字滤波器的基本结构

一个  $N$  阶 IIR 数字滤波器的系统函数可以表示为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (11.5)$$

其差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad (11.6)$$

无限长单位冲激响应(IIR)滤波器的特点是:

- (1) 系统的单位冲激响应无限长;
- (2) 信号流图中具有反馈支路,网络中有环路,也称递归结构;
- (3) 系统函数  $H(z)$  在  $z$  平面上存在极点。

IIR 系统的基本网络结构有三种,即直接型、级联型和并联型。

#### 11.1.2.1 直接 I 型

从式(11.6)的差分方程可以看出,  $y(n)$  由两部分构成。

第一部分  $\sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$ , 表示将信号  $x(n)$  进行延时, 组成  $M$  节的延时网络, 把每节延时抽头后与常系数  $b_i$  相乘(加权), 然后再把结果相加。这是一个横向结构网络, 即实现零点的网络。

第二部分  $\sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$ , 表示将输出信号  $y(n)$  进行延时, 组成  $N$  节的延时网络, 把每节延时抽头后与常系数  $a_i$  相乘, 然后再把结果相加。由于这一部分是对输出的延时, 故称为反馈网络。这部分实现极点。

$y(n)$  由这两部分相加组成, 其信号流图如图 11.3 所示。从图中可以看出直接 I 型结构需要  $M+N$  级延时单元。

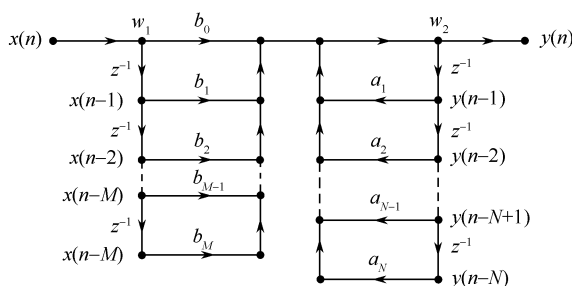


图 11.3 直接 I 型结构

### 11.1.2.2 直接 II 型

式(11.5)可以改写成

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$$

式中

$$H_1(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

这样, 图 11.3 所示直接 I 型结构, 可以看成是两部分网络  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  的级联。一个线性时不变系统, 交换级联次序, 系统函数不变。对应的信号流图如图 11.4 所示。

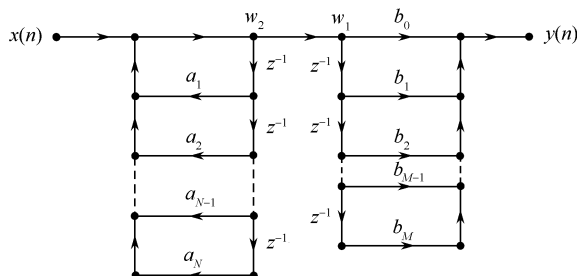


图 11.4 直接 I 型结构的变形

交换前后信号流图中的网络节点位置  $w_1$  和  $w_2$  发生了变化。很显然, 变化后的流图中  $w_1$

$= w_2$ , 所以可以将这两个节点进行合并, 不会影响系统分析, 如图 11.5 所示。这就得到直接 II 型结构。

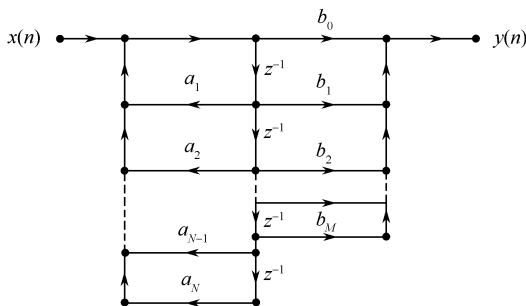


图 11.5 直接 II 型结构

从图 11.5 中可以看出: 直接 II 型结构需要  $N$  级延时单元(通常  $N > M$ ), 比直接 I 型结构节省了存储单元。

**【例 11.1.1】** 设三阶 IIR 数字滤波器的传递函数如下, 画出该系统的直接 II 型结构。

$$H(z) = \frac{3z^3 - 8z^2 + 5z - 2}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)}$$

首先将  $H(z)$  写成  $z^{-1}$  的多项式标准形式

$$H(z) = \frac{3 - 8z^{-1} + 5z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{6}z^{-2} - \frac{1}{6}z^{-3}}$$

该系统的差分方程形式为

$$y(n) = 3x(n) - 8x(n-1) + 5x(n-2) - 2x(n-3) + \frac{4}{3}y(n-1) - \frac{5}{6}y(n-2) + \frac{1}{6}y(n-3)$$

根据上述差分方程可直接画出该系统的直接 II 型结构, 如图 11.6 所示。

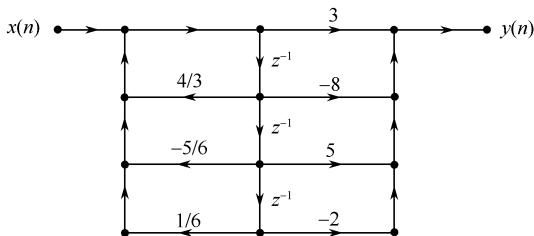


图 11.6 例 11.1.1 的直接 II 型网络结构

### 11.1.2.3 级联型

级联型网络结构是将系统函数因式分解为若干个二阶数字滤波器的系统函数的乘积, 即

$$H(z) = AH_1(z)H_2(z)\cdots H_K(z) = A\prod_{i=1}^K H_i(z) \quad (11.7)$$

式中



$$H_i(z) = \frac{\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2}}{1 - \alpha_{1i}z^{-1} - \alpha_{2i}z^{-2}} \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (11.8)$$

称为一个二阶节数字滤波器,  $A$  为常数。

$H(z)$  由  $K$  个二阶数字滤波器级联组成, 其框图如图 11.7 所示。

$H_i(z)$  是一阶或二阶系统,  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \beta_{0i}, \beta_{1i}, \beta_{2i}$  均为实系数。当  $\alpha_{2i} = \beta_{2i} = 0$  时,  $H_i(z)$  由二阶数字滤波器系统变成一阶数字滤波器系统。

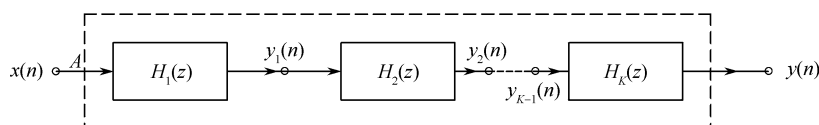


图 11.7  $H(z)$  的级联型框图

将系统分解为二阶子系统的目的是要保证算法中的系数为实数, 避免复数出现。

每个  $H_i(z)$  实现级联型结构时一般都采用直接 II 型结构作为子滤波器网络结构。使用直接 II 型结构作为子滤波器的级联型网络结构如图 11.8 所示。

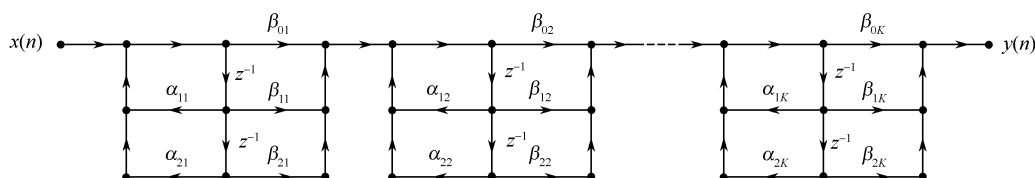


图 11.8 使用直接 II 型结构的级联网络结构

**【例 11.1.2】** 试画出例 11.1.1 系统的级联型网络结构流图。

将  $H(z)$  的分子、分母进行因式分解得

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(3 - 2z^{-1} + z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

将上式不同因式进行组合, 可得到不同的网络结构。一般来说把阶数相同的零极点可放在同一子滤波器中, 这样可减少单位延迟的数目。这样把单零点和单极点因式放在一个滤波器中, 把二阶零点和二阶极点放在一个滤波器中, 画出级联结构如图 11.9 所示。

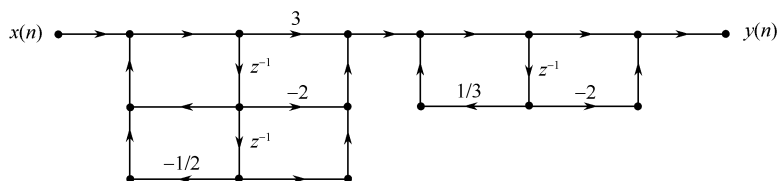


图 11.9 例 11.1.2 的信号流图

级联型结构的每个基本节只是关系到数字滤波器的某一对极点和一对零点。调整  $\beta_{0j}, \beta_{1j}$  和  $\beta_{2j}$  三个系数可以改变一对零点的位置, 调整  $\alpha_{1j}$  和  $\alpha_{2j}$  可以改变一对极点的位置, 而不影响其他零点和极点。因此, 级联结构的优点是便于准确地实现数字滤波器的零极点, 也便于调整滤波器的性能。同时, 级联结构中后面的网络输出不会再流到前面, 运算误差的累积相对直接型也小。在级联实现时, 零点和极点的配对方式和基本节的级联次序具有很大的零活性, 在有限

精度情况下,有一个最优选择的问题。如果考虑零极点配对,即将相近的零极点组合在一个二阶滤波器中,还可以减小有限字长效应的影响。

#### 11.1.2.4 并联型

如果把系统函数  $H(z)$  展成部分分式和的形式,即表示成若干个子滤波器相加的形式,就得到并联型 IIR 滤波器的基本结构。

$$H(z) = B_0 + H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_K(z) = B_0 + \sum_{i=1}^K H_i(z) \quad (11.9)$$

式中,  $B_0$  为一个常数,  $H_i(z)$  同级联型一样为二阶数字滤波器,其网络结构系数均为实数。一般形式为

$$H_i(z) = \frac{\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1}}{1 - \alpha_{1i}z^{-1} - \alpha_{2i}z^{-2}}$$

当  $\alpha_{2i} = 0, \beta_{1i} = 0$  时,  $H_i(z) = \frac{\beta_{0i}}{1 - \alpha_{1i}z^{-1}}$ , 子系统为一阶网络。

如果来实现系统的并联结构,只要将  $H(z)$  进行部分分式展开成  $H_i(z)$  的和式形式即可。每个  $H_i(z)$  都可以用直接 II 型来表示。这样,一般的  $H(z)$  的并联网络结构可用图 11.10 表示。

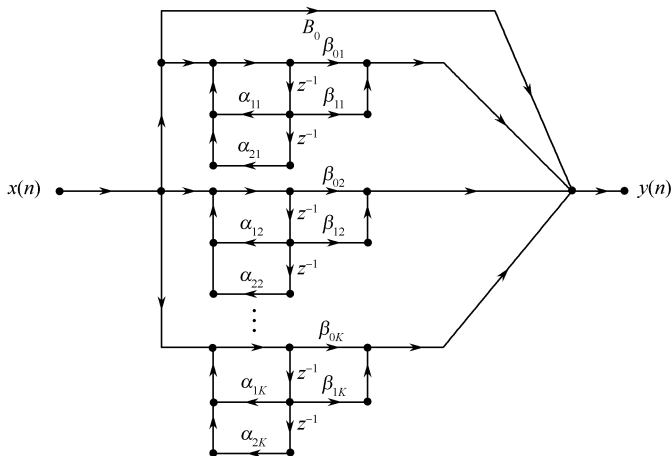


图 11.10 使用直接 II 型结构的并联网络结构

【例 11.1.3】 试画出例 11.1.1 系统的并联网络型结构流程图。

首先将  $H(z)$  进行部分分式展开

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(3 - 2z^{-1} + z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{Bz^{-1} + C}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} + D$$

求出  $A = -12, B = -3, C = 3, D = 12$ , 故系统函数可表示为

$$H(z) = 12 + \frac{-12}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{-3z^{-1} + 3}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

系统并联型网络结构如图 11.11 所示。

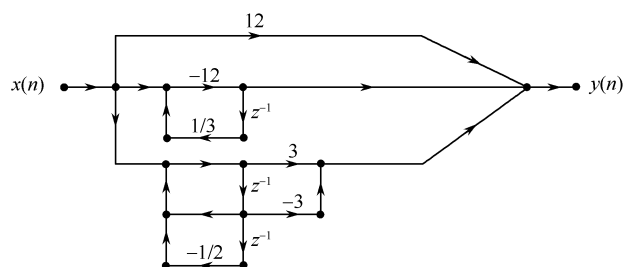


图 11.11 例 11.1.3 的信号流图

在并联型结构中,每个一阶网络决定一个实数极点,每个二阶网络决定一对共轭极点,调整极点位置非常方便,但零点调整却不如级联型方便。由于各基本网络是并联的,故各支路产生的运算误差互不影响,所以与直接型和级联型相比,并联型网络运算误差最小。并联型结构的各支路可同时对输入信号进行运算,故运算速度最高。

### 11.1.3 有限长单位抽样响应数字滤波器的基本结构

有限长单位冲激响应(FIR)滤波器突出的特点是单位抽样响应  $h(n)$  只有有限个非零值。即  $h(n)$  为一个  $N$  点长序列  $0 \leq n \leq N-1$ ,其系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (11.10)$$

其差分方程为

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m) \quad (11.11)$$

有限长单位冲激响应(FIR)滤波器的特点是:

- (1) 系统的单位抽样响应有限长;
- (2) 系统函数  $H(z)$  在  $z$  平面上  $z=0$  处有  $N-1$  阶极点,而没有除  $z$  平面原点外的极点;有  $N-1$  个零点可位于  $z$  平面上任何地方。FIR 滤波器是稳定系统;
- (3) 信号流图中主要是非递归结构,没有反馈支路。

用信号流图表示 FIR 结构,分为直接型、级联型、频率抽样型等,这里介绍前两种结构。

#### 11.1.3.1 直接型

根据  $H(z)$  或差分方程可直接画出 FIR 的信号流图,如图 11.12 所示。

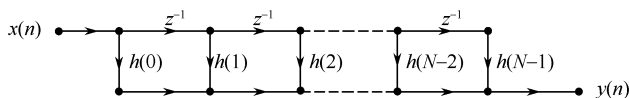


图 11.12 FIR 直接型网络结构

直接型网络结构又称横截型或卷积型结构,相当于 IIR 滤波器直接型的零点网络部分。

#### 11.1.3.2 级联型

和 IIR 系统一样,FIR 系统经过因式分解可以表示成若干个一阶或二阶滤波器的乘积。即

$$H(z) = \prod_{i=1}^K (\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2}) \quad (11.12)$$

图 11.13 给出了一般 FIR 系统的级联型结构。

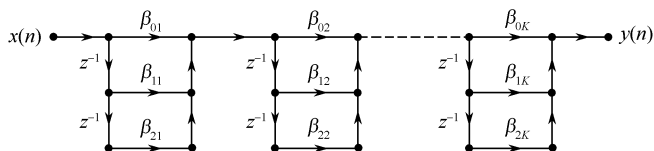


图 11.13 FIR 级联型网络结构

【例 11.1.4】 设一个 FIR 系统函数  $H(z)$  如下式，画出  $H(z)$  的直接型结构和级联型结构。

$$H(z) = 0.55 - 0.77z^{-1} + 2.32z^{-2} - 1.4z^{-3} + 2.4z^{-4}$$

将  $H(z)$  进行因式分解得：

$$H(z) = (0.5 - 0.7z^{-1} + 1.2z^{-2})(1.1 + 2z^{-2})$$

该系统直接型和级联型结构图如图 11.14 所示。

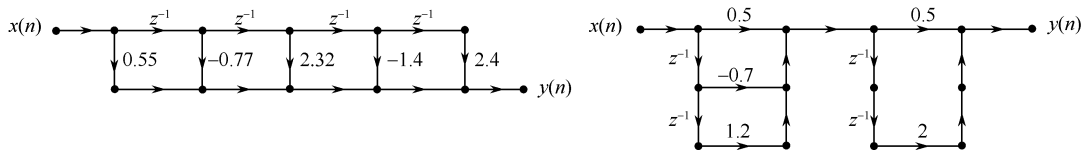


图 11.14 例 11.1.4 信号流程图

## 11.2 IIR 数字滤波器的设计

数字滤波器设计是数字信号处理的重要任务之一。IIR 数字滤波器是一种网络结构具有反馈支路的滤波器，其系统函数有不为零的极点存在。IIR 滤波器的设计必须考虑系统的稳定性问题。本节主要介绍经典的通过模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器的方法，即脉冲响应不变法和双线性变换法实现数字滤波器的方法。

### 11.2.1 模拟低通滤波器原型

模拟滤波器的理论和设计方法已相当成熟，典型的模拟滤波器都有严格的设计公式、现成的曲线和图表供设计人员查阅。实际中有三种广泛应用的滤波器，即巴特沃斯、切比雪夫和椭圆滤波器。在第 5 章，我们已经对巴特沃斯和切比雪夫这两种模拟滤波器有所了解。在这里，我们将从滤波器设计角度，简要叙述巴特沃斯低通滤波器的特征及其设计方法，并给出由模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器的设计思路。

#### 11.2.1.1 滤波器的技术指标

典型的模拟滤波器的技术指标以容限图的形式给出，如图 11.15 给出。其中  $|H_a(j\omega)|$  为

归一化后模拟滤波器的幅度响应,  $\omega_p$  为通带截止频率,  $\omega_{st}$  为阻带截止频率,  $\delta_p$ 、 $\delta_s$  分别为通带、阻带的容限。

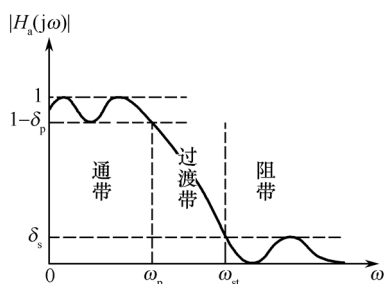


图 11.15 模拟低通滤波器频响幅度特性的容限图

在通带内、幅度响应要逼近 1, 要求:  $1 - \delta_p \leq |H_a(j\omega)| \leq 1$ ;

在阻带内、幅度响应要逼近 0, 要求:  $|H_a(j\omega)| \leq \delta_s$ ;  
幅度响应在过渡带 ( $\omega_p \sim \omega_{st}$ ) 中从通带平滑地下降到阻带, 过渡带的频率响应不作规定。

模拟滤波器幅度响应也可以用幅度平方函数  $|H_a(j\omega)|^2$  来表示, 即

$$|H_a(j\omega)|^2 = H_a(j\omega)H_a^*(j\omega)$$

由于滤波器冲激响应函数是实函数, 因而满足

$$H_a^*(j\omega) = H_a(-j\omega)$$

所以

$$|H_a(j\omega)|^2 = H_a(j\omega)H_a(-j\omega) = H_a(s)H_a(-s) \Big|_{s=j\omega} \quad (11.13)$$

其中  $H_a(s)$  是模拟滤波器的系统函数, 它是  $s$  的有理函数,  $H_a(j\omega)$  是滤波器的频率响应。

### 11.2.1.2 巴特沃斯(Butterworth)低通滤波器的设计

$N$  阶巴特沃斯(Butterworth)低通滤波器的幅度平方函数定义为

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad (11.14)$$

$N$  越大, 滤波器幅度下降的速度越快, 过渡带越窄。图 11.16 示出了  $N = 2, 4, 8$  的巴特沃斯低通滤波器的幅度平方特性, 它们都是单调递减的。

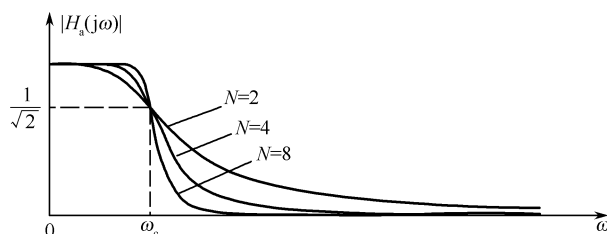


图 11.16 巴特沃斯幅度特性和  $N$  的关系

巴特沃斯原形滤波器具有如下特征:

(1) 当  $\omega = 0$  时,  $|H_a(j\omega)|^2 = 1$ , 即在  $\omega = 0$  处无衰减。

(2) 当  $\omega = \omega_c$  时,  $|H_a(j\omega)|^2 = 1/2$ ,  $\omega_c$  是 3dB 的截止频率。观察图 11.16 可以看出, 不管  $N$  为多少, 3dB 的截止频率是不变的。

(3) 在  $\omega < \omega_c$  的通带内,  $|H_a(j\omega)|^2$  有最平坦的幅度特性, 即  $N$  阶巴特沃斯(Butterworth)低通滤波器的幅度平方函数  $|H_a(j\omega)|^2$  在  $\omega = 0$  处, 其前  $2N-1$  阶导数为零。因而巴特沃斯滤波器又称为最平幅度特性滤波器。随着  $\omega$  从 0 变到  $\omega_c$ ,  $|H_a(j\omega)|^2$  单调减小,  $N$  越大, 减小得越慢, 通带内特性越平坦。

(4) 在  $\omega > \omega_c$  的过渡带和阻带内,  $|H_a(j\omega)|^2$  继续单调减小, 但衰减的速度比通带要快得多。当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $|H_a(j\omega)|^2 = 0$ 。

将式(11.14)代入式(11.13)可得

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\omega_c)^{2N}} \quad (11.15)$$

即可求出幅度平方函数  $H_a(s)H_a(-s)$  的  $2N$  个极点, 用  $s_k$  表示:

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}}(j\omega_c) = \omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N})} \quad k = 0, 1, \dots, (2N-1) \quad (11.16)$$

这  $2N$  个极点等间隔分布在半径为  $\omega_c$  (巴特沃斯圆) 的圆上, 间隔为  $\frac{\pi}{N}$  rad。图 11.17 给出了  $N = 3$  的巴特沃斯滤波器的幅度平方特性的极点分布图。

为形成稳定的模拟滤波器, 只取左半平面的  $N$  个极点构成  $H_a(s)$ , 其余右半平面的  $N$  个极点构成  $H_a(-s)$ ,  $H_a(s)$  的表示式为

$$H_a(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)} \quad (11.17)$$

这里分子系数为  $\omega_c^N$ , 由  $H_a(s)$  的低频特性决定。在一般的设计中, 都先选取  $\omega_c = 1$  来得到归一化的巴特沃斯滤波器。如果归一化的系统函数为  $H_{an}(s)$  表示, 则  $H_{an}(s)$  与  $H_a(s)$  ( $\omega_c \neq 1$ ) 关系为

$$H_a(s) = H_{an}(s/\omega_c)$$

归一化后巴特沃斯滤波器有以下形式:

$$H_{an}(s) = \frac{1}{s^N + a_{1s}^{N-1} + \dots + a_{N-1}s + a_N}$$

其分母多项式的系数有现成的表格可查, 如表 11.1 所示。

表 11.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数

$N$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
1	1.0000							
2	1.4142	1.0000						
3	2.0000	2.0000	1.0000					
4	2.6163	3.4142	2.6163	1.0000				
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000			
6	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637	1.0000		
7	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940	1.0000	
8	5.1258	13.1371	21.8642	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	1.0000

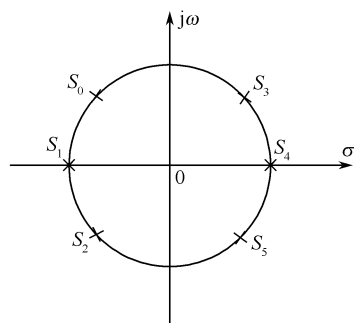


图 11.17 3 阶巴特沃斯滤波器极点分布

### 11.2.1.3 由模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器

在本节开始已经提到过设计数字滤波器可以按照技术要求先设计一个模拟低通滤波器,得到模拟低通滤波器的传输函数  $H_a(s)$ ,再按一定的映射关系将  $H_a(s)$  转换成数字低通滤波器的系统函数  $H(z)$ 。要建立模拟滤波器与数字滤波器的映射关系,就要建立  $s$  平面到  $z$  平面的映射关系,把  $s$  平面映射到  $z$  平面,使模拟滤波器的系统函数  $H_a(s)$  变换成数字低通滤波器的系统函数  $H(z)$ 。这种由复变量  $s$  到复变量  $z$  之间的映射关系,必须满足两个要求:

(1)  $H(z)$  的频率响应能模仿  $H_a(s)$  的频率响应,即  $s$  平面的虚轴必须映射到  $z$  平面的单位圆上;

(2) 因果稳定的  $H_a(s)$  映射成因果稳定的  $H(z)$ ,即  $s$  平面的左半平面必须映射到  $z$  平面单位圆的内部。

把模拟滤波器映射成数字滤波器后,就能使数字滤波器“模仿”模拟滤波器的特性,从而达到由模拟滤波器设计数字滤波器的目的。

映射方法有两种,即脉冲响应不变法和双线性变换法。

## 11.2.2 脉冲响应不变法

### 11.2.2.1 变换原理

脉冲响应不变法的设计原理是使数字滤波器的单位抽样响应序列  $h(n)$  模仿模拟滤波器的冲激响应  $h_a(t)$ ,将模拟滤波器的冲激响应进行等间隔抽样,使数字滤波器的单位抽样响应序列  $h(n)$  等于  $h_a(t)$  的抽样值,即

$$h(n) = h_a(nT) = h_a(t) \big|_{t=nT} \quad (11.18)$$

其中,  $T$  是抽样间隔。

把  $h(n)$  作为数字滤波器的单位脉冲响应,对其作  $z$  变换,就是数字滤波器的系统函数  $H(z)$ 。如果令  $h_a(s)$  为  $h_a(t)$  的拉氏变换,根据前面讨论的  $z$  变换与拉氏变换关系,得到

$$H(z) \big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(s - jk\omega_s) \quad (11.19)$$

其中,  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  为抽样角频率。

可以看出,脉冲响应不变法将模拟滤波器的  $s$  平面变换到数字滤波器的  $z$  平面。具体的,将模拟信号  $h_a(t)$  的拉氏变换  $H_a(s)$  以  $\omega_s$  为周期进行周期延拓,再按照  $z = e^{sT}$  的映射关系映射到  $z$  平面,就得到了  $H(z)$ 。这个映射是个多值映射,如图 11.18 所示。

这个映射满足  $s$  平面变换到  $z$  平面的两个基本要求。如图 11.18 所示,  $s$  平面虚轴( $j\omega$ )上每一段长为  $\frac{2\pi}{T}$  的线段都能映射到  $z$  平面单位圆上一周,满足  $s$  平面的虚轴必须映射到  $z$  平面的单位圆上的要求。 $s$  平面上每一条宽度为  $\frac{2\pi}{T}$  的横条的左半部分映射到  $z$  平面的单位圆内部,右半部分映射到  $z$  平面的单位圆外部,满足  $s$  平面的左半平面必须映射到  $z$  平面单位圆的内部的要求。

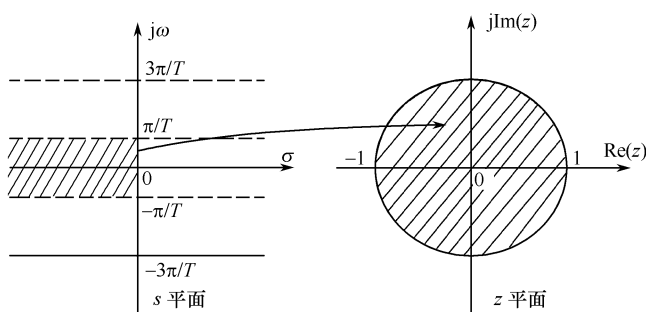


图 11.18 脉冲响应不变法的映射关系

求。即  $s$  平面上每一条宽度为  $\frac{2\pi}{T}$  的横条将重叠地映射到整个  $z$  平面。这正好说明  $z = e^{sT}$  的映射关系反映的是  $H(z)$  和  $H_a(s)$  的周期延拓函数之间的关系, 而不是  $H(z)$  直接与  $H_a(s)$  之间的关系。所以脉冲响应不变法不是从  $s$  平面到  $z$  平面的简单代数映射关系。

### 11.2.2.2 混叠失真

由式(11.19)可知, 数字滤波器的频率响应  $H(e^{j\Omega})$  与模拟滤波器的频率响应  $H_a(j\omega)$  间关系为

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a(j\omega - jk\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(j\frac{\Omega}{T} - jk\frac{2\pi}{T}\right) \quad (11.20)$$

这就是说, 数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓。正如时域抽样定理所讨论的, 只有模拟滤波器的频率响应是限带的, 即

$$H_a(j\omega) = 0 \quad |\omega| > \frac{\pi}{T}$$

才能使数字滤波器的频率响应不失真地重现模拟滤波器的频率响应, 而不发生混叠失真, 即

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\Omega}{T}\right) \quad |\Omega| < \pi \quad (11.21)$$

但是, 任何一个实际的模拟滤波器频率响应都不是严格限带的, 将不可避免地出现频谱混叠的情况, 即混叠失真。图 11.19 说明了这一现象。

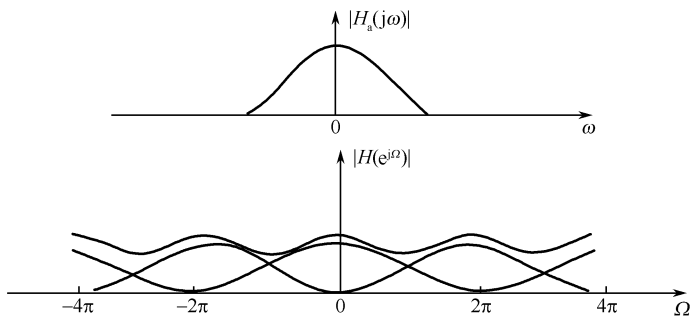


图 11.19 脉冲响应不变法的混叠失真情况



### 11.2.2.3 设计方法

按照脉冲响应不变法的原理,首先要对模拟滤波器系统函数  $H_a(s)$  进行拉氏反变换,得到模拟滤波器的冲激响应  $h_a(t)$ ,然后进行抽样得到  $h(n) = h_a(nT)$  作为数字滤波器的单位脉冲响应,再作  $z$  变换,得到数字滤波器的系统函数  $H(z)$ ,这个过程很繁琐。实际上,脉冲响应不变法特别适合于系统函数能用部分分式展开的情况。

设模拟滤波器系统函数  $H_a(s)$  只有单阶极点,且分母的阶次大于分子的阶次。因此可将  $H_a(s)$  展开成部分分式和的形式:

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \quad (11.22)$$

其拉氏反变换结果为模拟滤波器的冲激响应  $h_a(t)$ ,即

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t)$$

对  $h_a(t)$  进行抽样得到数字滤波器的单位抽样响应序列  $h(n)$ ,即

$$h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} = \sum_{i=1}^N A e^{s_i nT} u(n)$$

对其作  $z$  变换,就是数字滤波器的系统函数  $H(z)$ ,即

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (11.23)$$

对比式(11.22)和式(11.23),可以看出

(1)  $H_a(s)$  的单极点  $s_i$  变换  $H(z)$  的单极点  $e^{s_i T}$ ;

(2)  $H_a(s)$  与  $H(z)$  的部分分式的系数相同,都是  $A_i$ ;

(3) 如果模拟滤波器是稳定的,即所有极点  $s_i$  的实部小于零 ( $\text{Re}[s_i] < 0$ ),则变换后的数字滤波器的全部极点都在单位圆内,即  $|e^{s_i T}| = e^{\text{Re}[s_i]T} < 1$ ,故数字滤波器是稳定的;

(4) 虽然脉冲响应不变法能保证极点间的一一对应的代数关系,但不能保证从  $s$  平面到  $z$  平面有这种简单的代数映射关系。特别是数字滤波器的零点位置与模拟滤波器的零点位置间,就没有这种代数对应关系,而是随  $H_a(s)$  的  $s_i$  和部分分式的系数  $A_i$  的不同而变化。

从式(11.21)可以看出,数字滤波器的增益与抽样间隔  $T$  成反比。如果抽样频率很高,数字滤波器的增益会很高。因而希望数字滤波器的频率响应不受抽样频率的影响,故作以下修正,令

$$h(n) = Th_a(t) \Big|_{t=nT} = Th_a(nT)$$

则有

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

及

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(j\frac{\Omega}{T} - jk\frac{2\pi}{T}\right) \approx H_a\left(j\frac{\Omega}{T}\right) \quad |\Omega| < \pi$$

【例 11.2.1】 利用脉冲响应不变法,把  $H_a(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$  转换成等价的数字滤波器  $H(z)$ , 其中  $T = 0.1\text{s}$ 。

首先,用部分分式展开  $H_a(s)$ ,得

$$H_a(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}$$

极点为  $s_1 = -3, s_2 = -2$ , 转化到  $z$  平面变为  $z_1 = e^{-3T}, z_2 = e^{-2T}$ 。

代入式  $H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$ , 得

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} = \frac{2T}{1 - e^{-3T} z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-2T} z^{-1}} = \frac{0.1 - 0.08966z^{-1}}{1 - 1.5595z^{-1} + 0.6065z^{-2}}$$

#### 11.2.2.4 优缺点

从以上讨论可以看出,脉冲响应不变法使得数字滤波器的频率响应完全模仿模拟滤波器的频率响应,因此时域逼近良好,而且模拟频率与数字频率间变换是线性变换,即  $\Omega = \omega T$ 。因而一个线性相位的模拟滤波器(例如贝塞尔滤波器)可以映射为一个线性相位的数字滤波器。

脉冲响应不变法的主要缺点是由于频谱的周期延拓而产生的混叠失真,所以只适合充分带限的低通和带通滤波器设计,而高通和带阻滤波器不宜采用脉冲响应不变法进行设计。

### 11.2.3 双线性变换法

脉冲响应不变法可以在时域上良好地逼近模拟滤波器,但存在混叠失真的缺点。这是由于  $s$  平面到  $z$  平面的变换是多值映射关系造成的。双线性变换法可以克服这一缺点。

#### 11.2.3.1 变换原理

由于从  $s$  平面到  $z$  平面的变换式  $z = e^{sT}$  的多值映射,会导致数字滤波器频率响应出现混叠现象。为了克服多值映射,双线性变换法是通过两次映射来实现的。第一次映射,先将整个  $s$  平面压缩到  $s_1$  平面中的一条横带  $(-\frac{\pi}{T} \leq \omega_1 \leq \frac{\pi}{T})$  内;然后再通过第二次映射,将  $(-\frac{\pi}{T} \leq \omega_1 \leq \frac{\pi}{T})$  横带映射到  $z$  平面上去。这种映射法能保证使  $s$  平面与  $z$  平面建立单值对应,从而消除混叠现象。该过程如图 11.20 所示。

将  $s$  平面整个  $j\omega$  轴压缩变换到  $s_1$  平面的  $j\omega_1$  轴上的  $-\frac{\pi}{T}$  到  $\frac{\pi}{T}$  一段,可以采用正切变换关系

$$\omega = k \tan(\omega_1 T/2) \quad (11.24)$$

式中  $k$  为常数。

这样,  $\omega = \pm \infty$  变到  $\omega_1 = \pm \frac{\pi}{T}$ ,  $\omega = 0$  变到  $\omega_1 = 0$ , 可将式(11.24) 写成

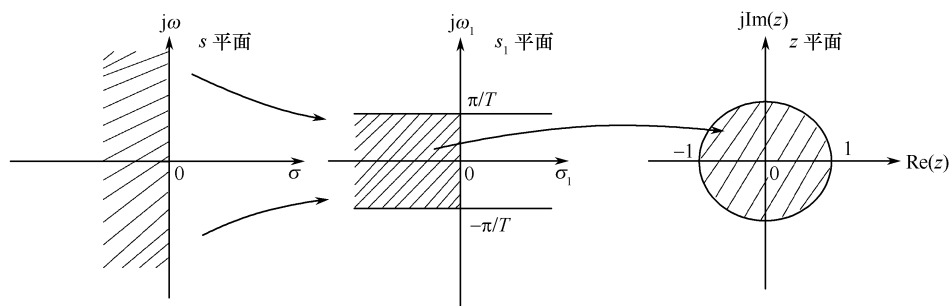


图 11.20 双线性变换法的映射关系

$$j\omega = k \frac{e^{\frac{\omega_1 T}{2}} - e^{-\frac{\omega_1 T}{2}}}{e^{\frac{\omega_1 T}{2}} + e^{-\frac{\omega_1 T}{2}}}$$

解析延拓到整个  $s$  平面和  $s_1$  平面, 令  $j\omega = s, j\omega_1 = s_1$ , 则得

$$s = k \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} = k \tan\left(\frac{s_1 T}{2}\right) = k \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} \quad (11.25)$$

再将  $s_1$  平面通过在下脉冲响应不变法用到的标准变换关系映射到  $z$  平面, 即

$$z = e^{s_1 T} \quad (11.26)$$

从而得到  $s$  平面与  $z$  平面间的单值映射关系为

$$s = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (11.27)$$

$$z = \frac{1 + \frac{s}{k}}{1 - \frac{s}{k}} \quad (11.28)$$

一般来说, 常数  $k$  可根据模拟滤波器的某一频率与数字滤波器的某一频率有对应关系来确定。例如, 如果使模拟滤波器与数字滤波器在低频处有较确切的对应关系, 即在低频处有  $\omega \approx \omega_1$ 。当  $\omega_1$  较小时有

$$\tan\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) \approx \frac{\omega_1 T}{2}$$

由式(11.24) 及  $\omega \approx \omega_1$  可得

$$\omega = k \tan\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) \approx k \frac{\omega_1 T}{2} \approx \omega_1$$

解得

$$k = \frac{2}{T}$$

此时, 数字滤波器的低频特性近似等于模拟原型滤波器的低频特性。

### 11.2.3.2 逼近的情况

双线性变换法能够满足  $s$  平面到  $z$  平面变换的两个基本要求, 即

(1) 首先,令  $z = e^{j\Omega}$ ,代入式(11.27),可得

$$s = k \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} = jk \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = j\omega \quad (11.29)$$

即  $s$  平面的虚轴对应  $z$  平面的单位圆。

(2) 其次,将  $s = \sigma + j\omega$  代入式(11.28),可得

$$z = \frac{k + s}{k - s} = \frac{(k + \sigma) + j\omega}{(k - \sigma) - j\omega}$$

因此

$$|z| = \frac{\sqrt{(k + \sigma)^2 + \omega^2}}{\sqrt{(k - \sigma)^2 + \omega^2}}$$

当  $\sigma = 0$  时,  $|z| = 1$ ,说明  $s$  平面的虚轴对应  $z$  平面的单位圆。当  $\sigma < 0$  时,  $|z| < 1$ ,说明  $s$  平面的左半平面对应  $z$  平面的单位圆内部。当  $\sigma > 0$  时,  $|z| > 1$ ,说明  $s$  平面的右半平面对应  $z$  平面的单位圆外部。因此,稳定的模拟滤波器经双线性变换后得到的数字滤波器也一定是稳定的。

### 11.2.3.3 优缺点

双线性变换法与脉冲响应不变法相比较,其主要优点是  $s$  平面到  $z$  平面的变换是一个单值的一一对应关系,从而避免了频率响应的混叠现象。由(11.29)式,我们可以得到模拟频率  $\omega$  与数字频率  $\Omega$  间单值变换关系为

$$\omega = k \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (11.30)$$

另外,通过式(11.27),我们可以容易地由模拟滤波器系统函数得到数字滤波器系统函数,应用十分简单方便。

双线性变换法的主要缺点是模拟频率与数字频率不再是线性关系,也就是说,模拟频率  $\omega$  与数字频率  $\Omega$  间存在着严重的非线性关系,如式(11.30)和图 11.21 所示。

由于这种频率之间的非线性变换关系,就产生了问题。首先,一个线性相位的模拟滤波器经过非线性变换后,得到的是非线性相位的数字滤波器,不再保持原有的线性相位了;其次,这种非线性关系就要求模拟滤波器的幅频响应必须是分段常数的,即某一频率段的幅频响应应近似等于某一常数(这正是典型低通、高通、带通、带阻滤波器的响应特性),不然变换所产生的数字滤波器幅频响应相对于原模拟滤波器的幅频响应会有畸变,例如一个模拟的微分器将不能得到数字微分器,如图 11.22 所示。

对于分段常数的滤波器,双线性变换后,可得到幅频特性为分段常数的数字滤波器,但各分段边缘的临界频率点产生了畸变,这种频率的畸变不难通过频率的预畸进行校正。也就是说,将临界频率事先加以畸变,然后经变换正好映射到所需的频率。例如,要求数字滤波器的 4 个临界频率为  $\Omega_p, \Omega_s, \Omega_1, \Omega_2$ ,如按线性变换所对应的模拟滤波器的 4 个频率分别为

$$\omega_p = \frac{\Omega_p}{T}, \omega_s = \frac{\Omega_s}{T}, \omega_1 = \frac{\Omega_1}{T}, \omega_2 = \frac{\Omega_2}{T}$$

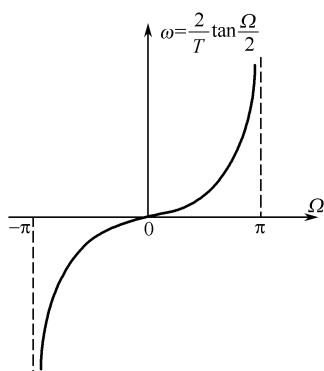


图 11.21 双线性变换法的频率非线性关系

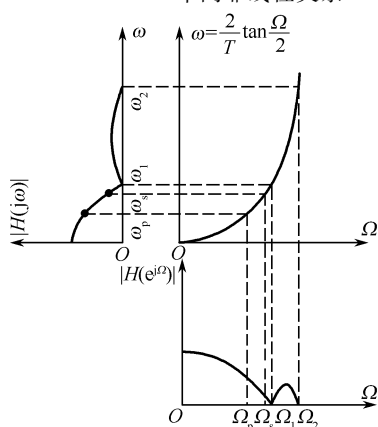


图 11.23 双线性变换的频率非线性预畸

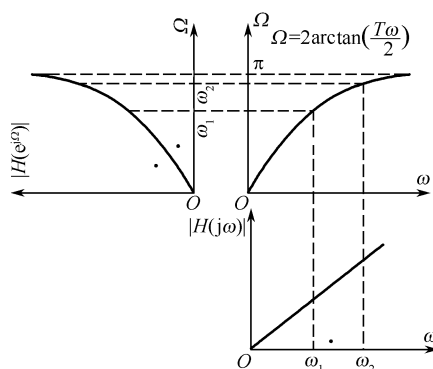


图 11.22 理想微分器经双线性变换后幅频响应发生畸变

但是模拟滤波器的这 4 个频率经双线性变换后(利用非线性的频率变换关系  $\Omega = 2 \arctan(\frac{\omega T}{2})$ ), 所得到的数字滤波器的临界频率就不等于  $\Omega_p, \Omega_s, \Omega_1, \Omega_2$  了。因而频率要加以预畸, 即利用式(11.30)

$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

的关系将这组数字频率变换为一组模拟滤波器的临界频率, 利用这组模拟频率来设计模拟带通滤波器。对此模拟滤波器进行双线性变换, 就能得到所需的数字滤波器, 它的临界频率就是我们要求的  $\Omega_p, \Omega_s, \Omega_1, \Omega_2$ 。这一预畸过程如图 11.23 所示。

**【例 11.2.2】** 试用双线性变化法将模拟滤波器

$$H_a(s) = \frac{2s}{2s+1}$$

转换成数字滤波器, 设  $T = 0.1\text{s}$ 。

根据式(11.27), 得

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=20 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{40 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{40 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = 40 \frac{1-z^{-1}}{41-39z^{-1}}$$

## 11.2.4 设计 IIR 数字滤波器的频率变换法

前面只介绍了 IIR 低通数字滤波器的设计方法, 但是在工程上常常要设计各种截止频率的低通、高通、带通和带阻数字滤波器, 这些数字滤波器的设计方法通常是在设计一个低通滤波器的基础上, 采用频率变换法把低通滤波器转换成所要求的滤波器。这种转换方法可以在模拟域进行, 也可以在数字域完成。用这两种变换方法进行各种频率范围的数字滤波器的设计过程可表示如下:

这里, 我们讨论数字频率变换法。

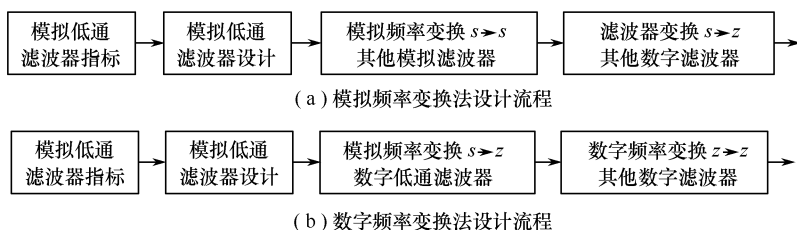


图 11.24 频率变换法设计数字滤波器流程

数字域频率变换的原理如下。

设  $H_L(z_L)$  为给定的低通数字滤波器原型,且为稳定的因果系统, $H_d(z_d)$  为希望设计的数字滤波器。为避免混淆,用  $z_L$  和  $z_d$  表示两个复平面。在  $z_L$  和  $z_d$  平面上的单位圆分别定义为

$$z_L = e^{j\theta}, z_d = e^{j\Omega} \quad (11.31)$$

设从  $z_L$  平面到  $z_d$  平面的映射关系为

$$z_L^{-1} = G(z_d^{-1}) \quad (11.32)$$

则低通滤波器原型  $H_L(z_L)$  经过这一映射得到的新系统函数为

$$H_d(z_d) = H_L(z_L) \Big|_{z_L^{-1} = G(z_d^{-1})} \quad (11.33)$$

下面要求出映射关系  $G(z_d^{-1})$ 。根据系统因果稳定的要求, $G(z_d^{-1})$  应满足下面的条件:

- (1) 必须是  $z_d^{-1}$  的有理函数,这样  $H_d(z_d)$  才可实现;
- (2)  $z_L$  平面上的单位圆必须映射到  $z_d$  平面的单位圆上;
- (3)  $z_L$  平面上的单位圆内部必须映射到  $z_d$  平面的单位圆内部,以确保滤波器的稳定。

设  $\theta$  和  $\Omega$  分别为  $z_L$  和  $z_d$  平面上的频率变量,即  $z_L = e^{j\theta}$ ,  $z_d = e^{j\Omega}$ 。根据式(11.32),可得

$$e^{-j\theta} = G(e^{-j\Omega}) = |G(e^{-j\Omega})| e^{j\arg[G(e^{-j\Omega})]}$$

这就要求

$$\begin{aligned} |G(e^{-j\Omega})| &= 1 \\ \theta &= -\arg[G(e^{-j\Omega})] \end{aligned} \quad (11.34)$$

式(11.34)表明  $G(z_d^{-1})$  在单位圆上的幅度恒等于 1,是一个全通函数。任何一个全通函数都可以表示为

$$z_L^{-1} = G(z_d^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z_d^{-1} - \alpha_k^*}{1 - \alpha_k z_d^{-1}} \quad (11.35)$$

式中,  $\alpha_k$  是  $G(z_d^{-1})$  的极点,可以是实数,也可以是共轭复数,所有极点必须都在单位圆内,以保证变换的稳定性。 $G(z_d^{-1})$  的所有零点都是其极点的共轭倒数  $1/\alpha_k^*$ 。 $N$  是全通函数的阶数。当  $\Omega$  从 0 变化到  $\pi$  时,全通函数相角  $\arg[G(e^{-j\Omega})]$  的变化量为  $N\pi$ 。选择不同的阶数  $N$  和极点  $\alpha_k$ ,将引入不同的相位变化量,从而使低通原型数字滤波器变换成各类数字滤波器。

#### 11.2.4.1 数字低通 — 数字低通

此时  $H_L(e^{j\theta})$  和  $H_d(e^{j\Omega})$  都是低通系统函数,只不过截止频率不同。因而  $\theta$  从 0 变化到  $\pi$  时,

相应的  $\Omega$  也从 0 变化到  $\pi$ 。所以,只需要采用 1 阶全通函数作为变换函数

$$z_L^{-1} = G(z_d^{-1}) = \frac{z_d^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z_d^{-1}} \quad (11.36)$$

变换关系式(11.36)的边界条件为

$$\begin{aligned} z_L = 1 &\rightarrow z_d = 1 \\ z_L = e^{j\theta_c} &\rightarrow z_d = e^{j\Omega_c} \end{aligned} \quad (11.37)$$

在式(11.36)代入  $z_L = e^{j\theta_c}$ ,  $z_d = e^{j\Omega_c}$ , 可得

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_c - \Omega_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_c + \Omega_c}{2}\right)} \quad (11.38)$$

这样,整个变换函数就唯一地确定了。利用式(11.36)和式(11.38),就可由已有的低通滤波器系统函数  $H_L(z_L)$ (截止频率  $\theta_c$ ) 得到新的低通滤波器系统函数  $H_d(z_d)$ (截止频率  $\Omega_c$ )。

#### 11.2.4.2 数字低通 — 数字高通

低通变换为高通只需要将低通频率响应在单位圆上旋转一个  $\pi$  的角度,也就是说将  $z_d$  变换成  $-z_d$  即可,这就是旋转变换。根据这个原理,将式(11.36)中的  $z_d$  用  $-z_d$  代替,变换函数为

$$z_L^{-1} G(z_d^{-1}) = -\frac{z_d^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z_d^{-1}} \quad (11.39)$$

变换关系式(11.39)的边界条件为

$$\begin{aligned} z_L = 1 &\rightarrow z_d = -1 \\ z_L = e^{j\theta_c} &\rightarrow z_d = e^{-j\Omega_c} \end{aligned} \quad (11.40)$$

在式(11.39)代入  $z_L = e^{j\theta_c}$ ,  $z_d = e^{-j\Omega_c}$ , 可得

$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\theta_c + \Omega_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_c - \Omega_c}{2}\right)} \quad (11.41)$$

这样,整个变换函数就唯一地确定了。利用式(11.39)和式(11.41),就可由已有的低通滤波器系统函数  $H_L(z_L)$ (截止频率  $\theta_c$ ) 得到高通滤波器系统函数  $H_d(z_d)$ (截止频率  $\Omega_c$ )。

#### 11.2.4.3 数字低通 — 数字带通

对于低通到带通的变换,变换后  $\Omega$  在  $-\pi$  到  $\pi$  形成两个通带,即  $\Omega$  从  $-\pi$  变化到  $\pi$ ,  $\theta$  需要从  $-\pi$  到  $\pi$  变化两次。所以,需要采用 2 阶全通函数作为变换函数:

$$z_L^{-1} = G(z_d^{-1}) = \pm \frac{z_d^{-1} - \alpha}{1 - \alpha^* z_d^{-1}} \frac{z_d^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha z_d^{-1}} = \pm \frac{z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + d_2}{d_2 z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + 1}$$

考虑到  $\theta = -\pi$  对应  $\Omega$  应该为 0, 即  $z_L = -1 \rightarrow z_d = 1$ , 可得数字低通到数字带通的变换函数为

$$z_L^{-1} = G(z_d^{-1}) = -\frac{z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + d_2}{d_2 z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + 1} \quad (11.42)$$

变换关系式(11.42)的边界条件为

$$\begin{aligned} z_L &= e^{-j\theta_c} \rightarrow z_d = e^{j\Omega_1} \\ z_L &= e^{j\theta_c} \rightarrow z_d = e^{j\Omega_2} \\ z_L &= 1 \rightarrow z_d = e^{\pm j\Omega_0} \end{aligned} \quad (11.43)$$

在式(11.42)代入式(11.43)的边界条件, 可得

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-2\cos\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}\right) / \cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)}{1 + \cot\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)} \\ d_2 &= \frac{1 - \cot\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)}{1 + \cot\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)} \\ \cos\omega_0 &= \frac{\cos\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)} \end{aligned} \quad (11.44)$$

其中  $\Omega_2$  和  $\Omega_1$  分别为带通滤波器要求的上、下截止频率,  $\Omega_0$  为带通滤波器通带的中心频率。

#### 11.2.4.4 数字低通 — 数字带阻

对于低通到带阻的变换, 变换后  $\Omega$  在  $-\pi$  到  $\pi$  形成两个阻带, 即  $\Omega$  从  $-\pi$  变化到  $\pi$ ,  $\theta$  需要从  $-\pi$  到  $\pi$  变化两次。所以, 需要采用 2 阶全通函数作为变换函数:

$$z_L^{-1} = G(z_d^{-1}) = \pm \frac{z_d^{-2} - \alpha}{1 - \alpha^* z_d^{-1}} \frac{z_d^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha z_d^{-1}} = \pm \frac{z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + d_2}{d_2 z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + 1}$$

考虑到  $\theta = 0$  对应  $\Omega$  应该为 0, 即  $z_L = 1 \rightarrow z_d = 1$ , 可得数字低通到数字带阻的变换函数为

$$z_L^{-1} = G(z_d^{-1}) = \frac{z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + d_2}{d_2 z_d^{-2} + d_1 z_d^{-1} + 1} \quad (11.45)$$

变换关系式(11.45)的边界条件为

$$\begin{aligned} z_L &= e^{-j\theta_c} \rightarrow z_d = e^{j\Omega_2} \\ z_L &= e^{j\theta_c} \rightarrow z_d = e^{j\Omega_1} \\ z_L &= 1 \rightarrow z_d = \pm 1 \end{aligned} \quad (11.46)$$

在式(11.45)代入式(11.46)的边界条件, 可得



$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{-2\cos\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}\right) / \cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)} \\
 d_2 &= \frac{1 - \tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \tan\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)} \\
 \cos\Omega_0 &= \frac{\cos\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\right)}
 \end{aligned} \tag{11.47}$$

其中  $\Omega_2$  和  $\Omega_1$  分别为带阻滤波器阻带的上、下通带截止频率,  $\Omega_0$  为阻带中心频率。

## 11.3 FIR 滤波器设计

11.2 节讨论了 IIR 数字滤波器的设计, 由于设计的 IIR 数字滤波器能够保留一些模拟滤波器的优良特性, 因此, 得到广泛的应用。但是这些特性的获得是以牺牲相频特性为代价的。换句话说, 用巴特沃斯、切比雪夫、椭圆等函数逼近理想的幅频特性, 相位上却都是非线性的相位逼近。在很多实际的电子系统中, 例如数据传输等波形传递系统中需要的滤波器, 即要求有满意的幅频特性又要有线性相位特性。在这方面, 有限长单位脉冲响应(FIR) 数字滤波器具有独特的优点。它可以在设计任意幅频特性的同时, 保证精确、严格的线性相位特性。FIR 数字滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  是有限长序列, 可以用一个因果系统来实现它, 因而精度高。而 IIR 数字滤波器只能采用递归结构。另外, FIR 数字滤波器还可以采用快速傅里叶变换方法来实现。

归纳起来, FIR 滤波器有以下几个特点:

- (1) 很容易获得严格的线性相位, 避免被处理的信号产生相位失真, 这一特点在宽频带信号处理、阵列信号处理、数据传输等系统中非常重要;
- (2) 可得到多带幅频特性;
- (3) 极点全部在原点(永远稳定), 无稳定性问题;
- (4) 任何一个非因果的有限长序列, 总可以通过一定的延时, 转变为因果序列, 所以因果性总是满足;
- (5) 无反馈运算, 运算误差小。
- (6) 因为无极点, 要获得好的过渡带特性, 需以较高的阶数为代价;
- (7) 无法利用模拟滤波器的设计结果, 一般无解析设计公式, 要借助计算机辅助设计程序完成。

设计 FIR 数字滤波器的方法有窗函数法、频率抽样法和等波纹优化设计法等。根据 FIR 数字滤波器的结构特点, 又称其为横向滤波器和非递归滤波器。

### 11.3.1 线性相位 FIR 滤波器的特征

FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (11.48)$$

### 11.3.1.1 线性相位条件

线性相位意味着一个系统的相频特性是频率的线性函数,即

$$\theta(\Omega) = -\alpha\Omega$$

式中,  $\alpha$  为常数,此时通过这一系统的各频率分量的时延为一相同的常数,系统的群时延为

$$\tau_g = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega} = \alpha$$

FIR 数字滤波器的  $h(n)$  为实数,且满足以下任一条件:

$$h(n) = h(N-1-n) \quad \text{偶对称}$$

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad \text{奇对称}$$

其对称中心在  $n = \frac{N-1}{2}$  处,则滤波器就具有准确的线性相位。

### 11.3.1.2 线性相位特点

在以下表示中将频率响应  $H(\Omega)$  表示成

$$H(j\Omega) = H(\Omega) e^{j\theta(\Omega)} \quad (11.49)$$

式中,  $H(\Omega)$  为幅度函数,它是一个纯实数,可以是正或负数;  $\theta(\Omega)$  为相位函数。

1.  $h(n)$  偶对称情况

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \frac{z^{-\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + z^{\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}}{2} \quad (11.50)$$

因此

$$H(j\Omega) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\Omega\right]$$

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\Omega\right]$$

$$\theta(\Omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega$$

$\theta(\Omega)$  是严格的线性相位,滤波器有  $\frac{N-1}{2}$  个抽样的延时。

2.  $h(n)$  奇对称情况

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\Omega\right] \quad (11.51)$$

$$\theta(\Omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega + \frac{\pi}{2} \quad (11.52)$$

$\theta(\Omega)$  是严格的线性相位, 滤波器有  $\frac{N-1}{2}$  个抽样的延时, 而且产生一个  $\frac{\pi}{2}$  的相移。称为正交网络。

### 11.3.1.3 幅度函数特点

1.  $h(n)$  偶对称,  $N$  为奇数(1 型)

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\Omega n) \quad (11.53)$$

其中

$$\begin{aligned} a(0) &= h\left(\frac{N-1}{2}\right) \\ a(n) &= 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \end{aligned}$$

2.  $h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数(2 型)

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} b(n) \cos\left[\Omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (11.54)$$

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$H(\Omega)$  对  $\Omega = \pi$  呈奇对称,  $H(\pi) = 0$ , 故高通滤波器不能用这种形式。

3.  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数(3 型)

$$H(\Omega) = \sum_{n=1}^{(N-3)/2} c(n) \sin(\Omega n) \quad (11.55)$$

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$H(\Omega)$  对  $\Omega = 0, \pi, 2\pi$  呈奇对称,  $\Omega = 0, \pi, 2\pi$  时,  $H(\Omega) = 0$ , 故低、高通滤波器不能用这种形式。

4.  $h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数(4 型)

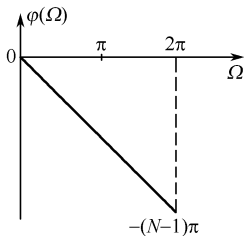
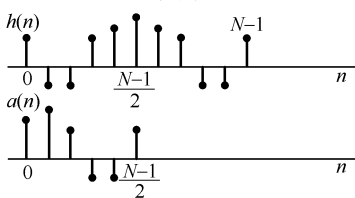
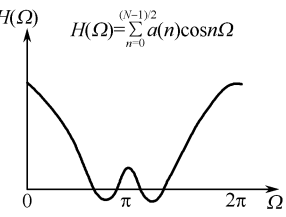
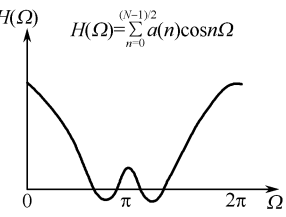
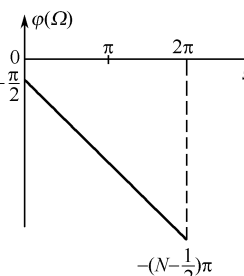
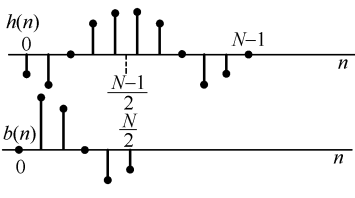
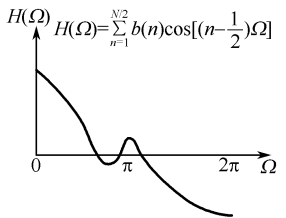
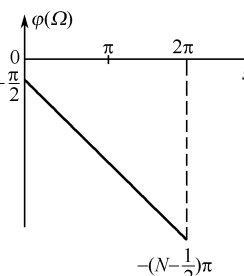
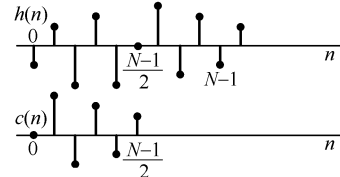
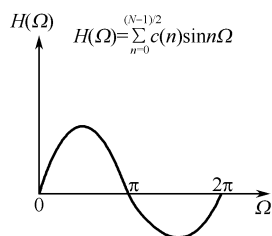
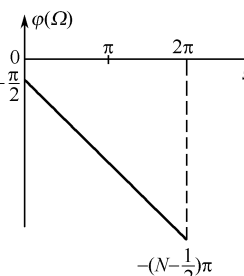
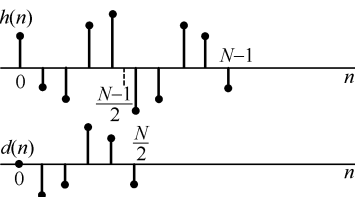
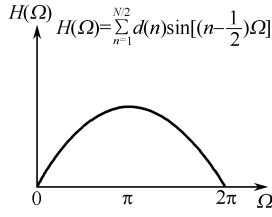
$$H(\Omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\Omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (11.56)$$

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$H(\Omega)$  对  $\Omega = 0, 2\pi$  呈奇对称, 对  $\Omega = \pi$  呈偶对称,  $\Omega = 0, 2\pi$  时,  $H(\Omega) = 0$ , 故低通滤波器不能用这种形式。

最后, 将四种线性相位 FIR 滤波器的特性示于表 11.2 中。

表 11.2 4 种线性相位 FIR 滤波器

$h(n) = h(N-1-n)$			
(1)	<div><math display="block">\varphi(\Omega) = -\Omega\left(\frac{N-1}{2}\right)</math></div>	<div><math>N</math> 为奇数</div>  <td><div><math>H(\Omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos n\Omega</math></div></td>	<div><math>H(\Omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos n\Omega</math></div> 
(2)	<div><math display="block">\varphi(\Omega) = -\Omega\left(\frac{N-1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}</math></div>	<div><math>N</math> 为偶数</div> 	<div><math>H(\Omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos[(n-\frac{1}{2})\Omega]</math></div> 
$h(n) = -h(N-1-n)$			
(3)	<div><math display="block">\varphi(\Omega) = -\Omega\left(\frac{N-1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}</math></div>	<div><math>N</math> 为奇数</div> 	<div><math>H(\Omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} c(n) \sin n\Omega</math></div> 
(4)	<div><math display="block">\varphi(\Omega) = -\Omega\left(\frac{N-1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}</math></div>	<div><math>N</math> 为偶数</div> 	<div><math>H(\Omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin[(n-\frac{1}{2})\Omega]</math></div> 

## 11.3.1.4 零点位置

线性相位 FIR 滤波器的系统函数满足  $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$

零点位置有 4 种可能(如图 11.25 所示):

- (1) 零点  $z_i$  既不在实轴上,也不在单位圆上,是互为倒数的两组共轭对。
- (2) 零点  $z_i$  不在实轴上,但在单位圆上,是共轭对。
- (3) 零点  $z_i$  在实轴上,不在单位圆上,是实数零点和倒数零点。
- (4) 零点  $z_i$  既在实轴上,也在单位圆上,此时只有一个零点  $z = 1$  或  $z = -1$ 。

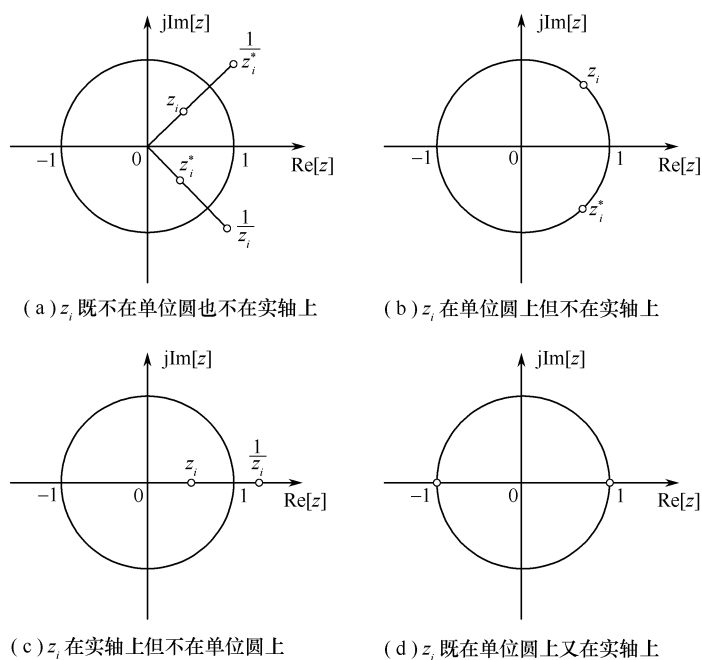


图 11.25 线性相位 FIR 滤波器的 4 种不同零点结构

### 11.3.2 窗函数设计法

窗函数设计法是从单位脉冲响应序列着手,使  $h(n)$  逼近理想的单位脉冲响应序列  $h_d(n)$ 。设所要求的理想数字滤波器的频率响应为  $H_d(\Omega)$ ,  $h_d(n)$  是与其对应的单位脉冲响应,因此

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (11.57)$$

由于  $H_d(\Omega)$  是矩形频率特性,故  $h_d(n)$  一定是无限长的非因果序列。

而所设计的是 FIR 数字滤波器,其单位脉冲响应  $h(n)$  必然是有限长的,所以要用有限的  $h(n)$  来逼近无限长的  $h_d(n)$ ,最有效的方法是截断  $h_d(n)$ ,即用有限长的  $w(n)$  来截取  $h_d(n)$ ,表示为

$$h(n) = h_d(n)w(n) \quad (11.58)$$

这种设计方法称为窗函数设计法。

窗函数  $w(n)$  不仅影响原来信号在时域的形状,也影响了其在频域的形状。

假设理想低通滤波器的频率响应  $H_d(\Omega)$  为

$$H(\Omega) = \begin{cases} -e^{j\Omega a} & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (11.59)$$

相应的单位抽样响应  $h_d(n)$  为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-j\Omega a} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin[\Omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)} \quad (11.60)$$

如图 11.26 所示,我们可以看出, $h_d(n)$  是中心位于  $\alpha$  的偶对称无限长非因果序列。为了构造一个长度为  $N$  的因果 FIR 滤波器,将  $h_d(n)$  截取一段,使得

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11.61)$$

为了保证设计的滤波器具有线性相位, $h(n)$  必须满足对称性要求,因此

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (11.62)$$

式(11.61) 可以将  $h(n)$  看作是  $h_d(n)$  与矩形窗  $w_R(n)$  相乘的结果,即

$$h(n) = h_d(n)w_R(n) \quad (11.63)$$

其中

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11.64)$$

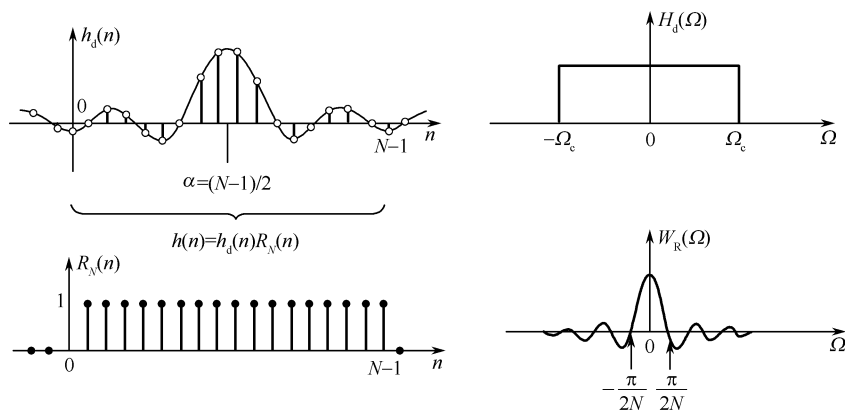


图 11.26 理想矩形幅频特性的  $h_d(n)$  和  $H_d(\Omega)$  以及矩形窗函数序列的  $w_R(n) = R_N$  和  $W_R(\Omega)$

下面从频域上分析对  $h_d(n)$  加窗的影响。由复卷积定理,时域相乘,频域是周期卷积的关系,故  $h(n)$  的频率特性为

$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} H_d(\Omega) * W_R(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\Omega - \theta) d\theta \quad (11.65)$$

式中, $H(\Omega)$ 、 $H_d(\Omega)$  和  $W_R(\Omega)$  分别是  $h(n)$ 、 $h_d(n)$  和  $w_R(n)$  的傅里叶变换。可以看出, $H(\Omega)$  能否逼近  $H_d(\Omega)$  取决于窗函数的频谱特性  $W_R(\Omega)$ ,

$$W_R(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\Omega n}$$

这里选用矩形窗,其频谱特性为

$$W_R(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = e^{-j\Omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \quad (11.66)$$

幅频特性和相频特性为

$$W_R(j\Omega) = W_R(\Omega)e^{-j\Omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \quad (11.67)$$

其中,幅频特性

$$W_R(\Omega) = \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}$$

$W_R(\Omega)$  的图形如图 11.26 所示,它在  $\pm 2\pi/N$  之内为一共主瓣,两侧形成许多衰减振荡的旁瓣。

理想低通滤波器的频率响应式可表示为

$$H_d(j\Omega) = H_d(\Omega)e^{-j\Omega a} \quad (11.68)$$

其幅度响应为

$$H_d(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (11.69)$$

由式(11.65)可得

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} H_d(\Omega) * W_R(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\Omega - \theta) d\theta \\ &= e^{-j\Omega a} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\Omega - \theta) d\theta \right] \end{aligned}$$

因此 FIR 滤波器的幅度响应为

$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\Omega - \theta) d\theta \quad (11.70)$$

式(11.70)表明,滤波器的幅度响应等于理想低通滤波器的幅度响应  $H_d(\Omega)$  与矩形窗幅度响应  $W_R(\Omega)$  的周期卷积,如图 11.27 所示。

当  $\Omega = 0$  时,  $H(0)$  等于图 11.27(a) 与 (b) 两波形乘积的积分,相当于对  $W_R(\theta)$  在  $\pm\Omega_c$  之间一段波形的积分,当  $\Omega_c \gg 2\pi/N$  时,近似  $\pm\pi$  之间波形的积分。当  $\Omega = \Omega_c$  时,情况如图 11.32(c) 所示,当  $\Omega \gg 2\pi/N$  时,积分近似为  $W_R(\theta)$  一半波形的积分,对  $H(0)$  归一化后的值为  $1/2$ 。当  $\Omega = \Omega_c + 2\pi/N$  时,情况如图 11.32(e) 所示,  $W_R(\theta)$  主瓣完全移到积分区间外边,因为最大的一个负峰完全在区间  $[-\Omega_c, \Omega_c]$  中,因此,  $H(\theta)$  在该点形成最大的负峰。相应地,当  $\Omega = \Omega_c - 2\pi/N$  时,情况如图 11.32(d) 所示,  $W_R(\theta)$  主瓣完全在区间  $\pm\Omega_c$  之间,而最大的一个负峰移到区间  $[-\Omega_c, \Omega_c]$  外,因此,  $H(\theta)$  在该点形成最大的正峰。图 11.27 表明,  $H(\theta)$  最大的正峰与最大的负峰对应的频率间距为  $4\pi/N$ 。

综上所述,加窗函数后,对理想特性的主要影响有:

(1)  $H_d(\Omega)$  在截止频率处的间断点变成了连续曲线,使  $H(\Omega)$  出现一个过度带。其宽度等于  $W_R(\Omega)$  的主瓣宽度,即两个过冲的间隔  $\Delta\Omega = 4\pi/N$ 。窗函数的主瓣越宽,过渡带越宽。

(2) 由于窗函数旁瓣的作用,使幅频特性出现波动,波动幅度取决于旁瓣的相对幅度,旁瓣范围的面积越大,通带波动和阻带波动越大,换句话说,阻带衰减减少。而波动的多少,取决于旁瓣的多少。

(3) 增加窗函数的长度  $N$ ,只能减少  $W_R(\Omega)$  的主瓣宽度,而不能改变旁瓣与主瓣的相对

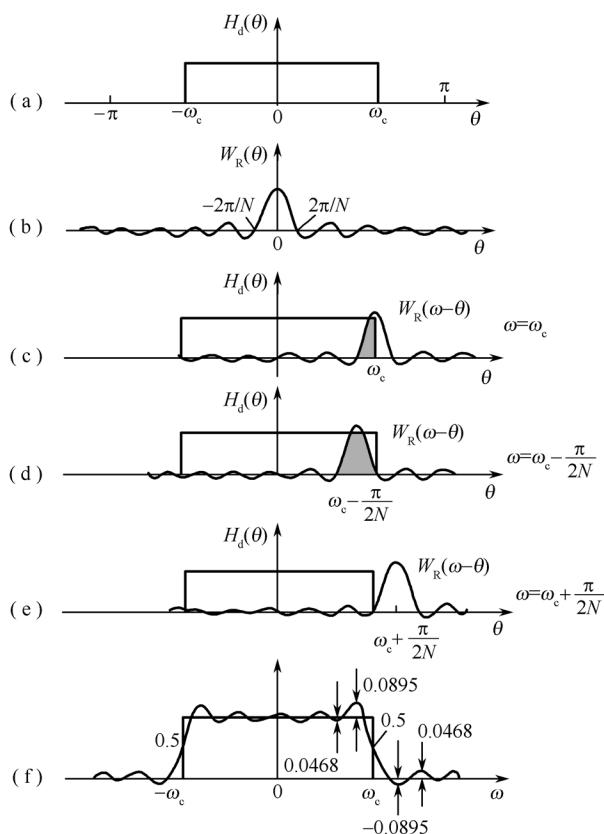


图 11.27 矩形窗的卷积过程

值,该值主要取决于窗函数的形状,这是因为窗函数的幅频特性为

$$W_R(\Omega) = \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)} \approx \frac{\sin\left(\frac{\Omega N}{2}\right)}{\Omega/2} = N \frac{\sin x}{x}$$

式中  $x = \Omega N/2$ 。

长度  $N$  的变化只能改变窗谱的主瓣宽度, $\Omega$  坐标的比例与  $W_R(\Omega)$  的绝对大小,而不能改变主瓣与旁瓣幅值的相对比例,这个相对比例是由窗函数形状决定的,而与  $N$  无关。换句话说,增加截取窗函数的长度  $N$  只能相应地减少过渡带,而不能改变过冲值。

由于过冲值的大小直接影响通带特性和阻带衰减,所以对滤波器的性能影响较大。例如在矩形窗情况下,过冲达 8.95%,而阻带最小衰减为  $20\lg_{10}(8.95) = -21\text{dB}$ 。在工程上是远远不够的。因此,为满足工程上的要求,只能以改变窗函数的形状来改善滤波器的幅频特性。

窗函数的选择原则是:

- (1) 具有较低的旁瓣幅度,尤其是第一旁瓣幅度。
- (2) 旁瓣幅度下降速率要大,以利增加阻带衰减。
- (3) 主瓣的宽度要窄,以获得较陡的过渡带。

通常上述几点很难同时满足。当选用主瓣宽度较窄时,虽然得到较陡的过渡带,但通带和阻带的波动明显增加;当选用最小的旁瓣幅度时,虽能得到匀滑的幅度响应和较小的阻带波动,但过渡带加宽。因此,实际选用的窗函数往往是它们的折中。在保证主瓣宽度达到一定要求



的条件下,适当牺牲主瓣宽度来换取旁瓣波动的减少。以上是从幅频特性的改善对时窗函数提出的要求。实际上设计的 FIR 滤波器往往要求具有线性相位,即

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

因此,除了要求  $h_d(n)$  满足线性相位条件外,对  $w(n)$  也要求长度  $N$  有限,且以  $(N-1)/2$  为其对称中心,即

$$w(n) = w(N-1-n)$$

综上所述,窗函数不仅起截矩作用,还能起平滑作用,在很多领域都得到广泛应用。因此设计一个特性良好的窗函数有着重要的实际意义。

设计 FIR 滤波器常用的窗函数如下。

### 1. 矩形窗函数

$$w(n) = R(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$W_R(j\Omega) = W_R(\Omega)e^{-j(\frac{N-1}{2})\Omega} = \frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}e^{-j(\frac{N-1}{2})\Omega}$$

### 2. 三角形(Bartlett)窗函数

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & (N-1)/2 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

其傅里叶变换为

$$W(j\Omega) = \frac{2}{N-1} \left\{ \frac{\sin[(N-1)\Omega/4]}{\sin(\Omega/2)} \right\}^2 e^{-j(\frac{N-1}{2})\Omega}$$

当  $N \gg 1$  时可写成

$$W(j\Omega) \approx \frac{2}{N} \left\{ \frac{\sin[N\Omega/4]}{\sin(\Omega/2)} \right\}^2 e^{-j(\frac{N-1}{2})\Omega}$$

主瓣宽度为  $8\pi/N$ ,比矩形窗函数主瓣宽度增加一倍,但旁瓣却很小。

### 3. 汉宁(Hanning)窗函数

汉宁窗函数是余弦平方窗函数,又叫升余弦窗函数

$$\begin{aligned} w(n) &= \sin^2\left(\frac{\pi n}{N-1}\right)R_N(n) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n) \\ &= 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

利用傅里叶变换特性

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$$

则有

$$\begin{aligned}
 W(j\Omega) &= \left\{ 0.5W_R(\Omega) + 0.25 \left[ W_R\left(\Omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\Omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} \right\} \\
 &= W(\Omega) e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega}
 \end{aligned}$$

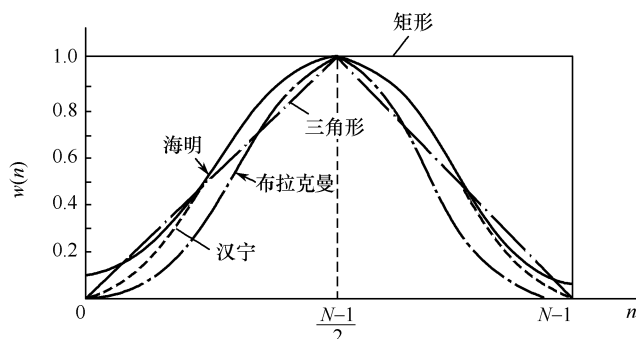


图 11.28 设计有限长单位冲激响应滤波器常用的几种窗函数

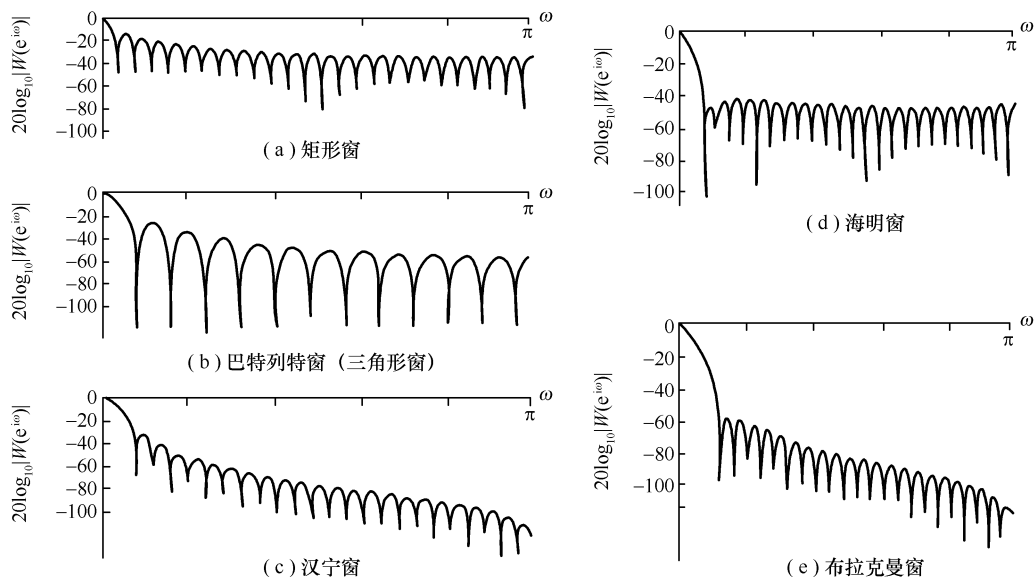
图 11.29 图 11.28 的各种窗函数的傅里叶变换 ( $N = 51$ )

表 11.3 6 种窗函数基本参数的比较

窗函数	旁瓣峰值幅度 (dB)	过渡带宽 $\Delta\Omega$	阻带最小衰减 (dB)
矩形窗	-13	$4\pi/N$	-21
三角形窗	-25	$8\pi/N$	-25
海宁窗	-31	$8\pi/N$	-44
海明窗	-41	$8\pi/N$	-53
布拉克曼窗	-57	$12\pi/N$	-74
凯泽窗 ( $\beta = 7.856$ )	-57	$10\pi/N$	-80

在频域中, FIR 数字滤波器的频率响应  $H(\Omega)$  为

$$H(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W(\Omega - \theta) d\theta$$

因而  $H(\Omega)$  逼近  $H_d(\Omega)$  的好坏,完全取决于窗函数的频率特性  $W(\Omega)$ 。

**【例 11.3.1】** 试用窗函数法设计一线性相位 FIR 滤波器,并满足技术指标如下:

在  $\Omega_p = 30\pi$  rad/s 处衰减不大于  $-3$ dB;在  $\Omega_s = 46\pi$  rad/s 处衰减不小于  $-40$ dB;对模拟信号进行抽样的周期  $T = 0.01$ s。

**解:**根据截止频率  $\Omega_s$  要求,对照窗函数性能表,确定选用海明窗。

确定窗宽  $N_0$ 。因为海明窗过渡带宽为  $8\pi/N$ ,所以可得

$$N \geq \frac{8\pi}{0.46\pi - 0.3\pi} = 50$$

因此选  $N = 51$ 。

确定位移系数  $m = \frac{51-1}{2} = 25$ 。所以单位冲击响应为

$$h(n) = \frac{\sin[0.3\pi(n-25)]}{\pi(n-25)} \left[ 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{50}\right) \right], 0 \leq n \leq 50$$

FIR 滤波器输出为

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(50)x(n-50)$$

### 11.3.3 利用频率抽样技术设计

频率抽样设计法是从频域出发,把给定的理想频率响应  $H_d(\Omega)$  等间隔抽样  $N$  个点得到

$$H_d(\Omega) \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_d(k) = H(k) \quad (11.71)$$

再对  $H_d(k)$  作 IDFT,得到  $h(n)$ ,

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.72)$$

将  $h(n)$  作为所设计的滤波器的单位脉冲响应。

#### 11.3.3.1 为保证具有线性相位,对频率抽样值的约束条件

将抽样值用幅值  $H_k$  与相角  $\theta_k$  表示成  $H(k) = H_k e^{j\theta_k}$

$h(n)$  偶对称  $N$  为奇数时,约束条件为

$$\begin{aligned} H_k &= H_{N-k} \\ \theta_k &= -k\pi \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \end{aligned}$$

$h(n)$  偶对称  $N$  为偶数时,约束条件为

$$\begin{aligned} H_k &= -H_{N-k} \\ \theta_k &= -k\pi \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \end{aligned}$$

$h(n)$  奇对称  $N$  为奇数时,约束条件为

$$\begin{aligned} H_k &= -H_{N-k} \\ \theta_k &= -k\pi\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$h(n)$  奇对称  $N$  为偶数时,约束条件为

$$\begin{aligned} H_k &= H_{N-k} \\ \theta_k &= -k\pi\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

### 11.3.3.2 设计误差与哪些量有关,如何减小设计误差

从时域角度看,如果待设计的频率响应为  $H_d(\Omega)$ ,对应的单位脉冲响应为

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

在频域等间隔抽样  $N$  点,利用 IDFT 得到的  $h(n)$  是  $h_d(n)$  以  $N$  为周期的周期性延拓

$$h(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rN) R_N(n)$$

如果  $H_d(\Omega)$  有间断点,那么  $h_d(n)$  应是无限长的,这样一来由于时域混叠,引起所设计的  $h(n)$  和  $h_d(n)$  有偏差。为此在频域的抽样点数  $N$  应加大。 $N$  越大,设计出的滤波器越逼近待设计的滤波器  $H_d(\Omega)$ 。

从频域角度看  $H(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ ,表明在抽样点上  $H(\Omega)$  和  $H(k)$  相等,逼近误差为零。在抽样点之间其误差和  $H_d(\Omega)$  特性的平滑程度有关,特性越平滑误差越小,抽样点数越大误差越小。

**结论:**为改善滤波器的特性,可以对频响间断点附近插入一个或几个过渡抽样点,适当增加抽样点数。

### 11.3.3.3 频率抽样法

对  $H_d(\Omega)$  进行频率抽样得到  $H(k)$ ,为了方便将  $H(k)$  表示成为幅度响应  $|H(k)|$  及相位响应  $\theta(k)$  的形式,即

$$H(k) = |H(k)| e^{j\theta(k)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

频率抽样有两种方法:

#### 1. 频率抽样法 1

第一个抽样点在  $\Omega = 0$  处

$$\begin{aligned} H(k) &= H_d(k) = H_d(\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k} \\ h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ H(z) &= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{N} e^{-j(\frac{N-1}{2}\Omega)} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\frac{\pi k}{N}\Omega} \frac{\sin(\frac{\Omega N}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi k}{N})}$$

由于

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

当  $h(n)$  为实数时, 满足  $H(k) = H^*(N-k)_N$ , 故

$$|H(k)| = |H(N-k)|$$

$$\theta(k) = -\theta(N-k)$$

当  $N$  为奇数时, 有线性相位约束条件

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1 \text{ 型})$$

$$\theta(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (3 \text{ 型})$$

当  $N$  为偶数时, 有

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1 \\ 0, & k = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (2 \text{ 型})$$

$$\theta(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1 \\ 0, & k = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4 \text{ 型})$$

**【例 11.3.2】** 用频率抽样法 1 设计一个线性相位低通数字滤波器。已知  $\Omega_c = 0.5\pi$ ,  $N = 33$ , 边沿上设一个过渡点  $|H(k)| = 0.39$ 。

**解:** 抽样频率间隔为  $\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{33}$ ,  $\Omega_c$  的位置在  $0.5\pi / (2\pi/33) = 8.25$ , 即  $k = 8$  和  $k = 9$  之间, 其对称点位置是  $(N-k)$  即  $k = (33-9) = 24$  和  $k = (33-8) = 25$  之间。对理想低通抽样, 可得

$$H_k = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 8 \\ 0.39 & k = 9 \\ 0 & 10 \leq k \leq 16 \end{cases}$$

$$\phi(k) = -\frac{\pi k(N-1)}{N} = -\frac{32}{33}\pi k, 0 \leq k \leq 16$$

利用共轭对称性, 可得  $k = 17, \dots, 32$  的抽样值。综合幅度和相位, 第一类线性相位 FIR 数字滤波器的离散频域抽样值为

$$H_k = \begin{cases} e^{-j\frac{32}{33}\pi k} & 0 \leq k \leq 8 \text{ 及 } 25 \leq k \leq 32 \\ 0.39e^{-j\frac{32}{33}\pi k} & k = 9, 24 \\ 0 & 10 \leq k \leq 23 \end{cases}$$

$$H(\Omega) = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} e^{-j\Omega}}$$

$$= \frac{e^{-j16\Omega}}{33} \left\{ \frac{\sin \frac{33\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} + \sum_{k=1}^8 \left[ \frac{\sin\left(\frac{33\Omega}{2} - k\pi\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{k\pi}{33}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{33\Omega}{2} + k\pi\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{k\pi}{33}\right)} \right] + \right.$$

$$\left. \frac{0.39\sin\left(\frac{33\Omega}{2} - 9\pi\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{9\pi}{33}\right)} + \frac{0.39\sin\left(\frac{33\Omega}{2} + 9\pi\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{9\pi}{33}\right)} \right\}$$

## 2. 频率抽样法 2

第一个抽样点在  $\Omega = \frac{\pi}{N}$  处

$$H(k) = H_d(k) = H_d(\Omega) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi k + \pi}{N}}$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(\frac{2\pi k n + \pi}{N})} = e^{j\frac{\pi}{N}} \text{IDFT}[H(k)]$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-(k+\frac{1}{2})} z^{-1}}$$

$$H(\Omega) = \frac{\cos\left(\frac{\Omega N}{2}\right)}{N} e^{-j(\frac{N-1}{2})\Omega} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})} \frac{1}{j\sin\left[\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

由于

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})n}$$

当  $h(n)$  为实数时, 满足  $H(k) = H^*(N-1-k)_N$ , 故

$$|H(k)| = |H(N-1-k)|$$

$$\theta(k) = -\theta(N-1-k)$$

当  $N$  为奇数时,有线性相位约束条件

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N-3}{2} \\ 0, & k = \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N}\left(N-k - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1 \text{ 型})$$

$$\theta(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N-3}{2} \\ 0, & k = \frac{N-1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{N}\left(N-k - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (3 \text{ 型})$$

当  $N$  为偶数时,有

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1 \\ 0, & k = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (2 \text{ 型})$$

$$\theta(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \\ 0, & k = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4 \text{ 型})$$

#### 11.3.4 IIR 滤波器和 FIR 滤波器的比较

到此为止,我们讨论了 IIR 和 FIR 两种滤波器的设计方法,但在实际应用时应该如何去选择它们呢?下面对这两种滤波器作一比较。

从性能上说,IIR 滤波器系统函数的极点可以位于单位圆内的任何位置,因此可以用较低的阶数获得高的选择性,所用的存储单元少,所以经济效率高。但是这个高效率是以相位的非线性为代价的。而 FIR 却可以得到严格的线性相位,然而 FIR 滤波器系统函数的极点固定在原点,所以只能用较高的阶数达到高的选择性。对于同样的滤波器设计指标,FIR 滤波器所需的阶数比 IIR 滤波器的阶数高 5 ~ 10 倍,结果成本较高,信号延时也较大。

从结构上看,IIR 滤波器必须采用递归结构,极点位置必须在单位圆内,否则系统将不稳

定。在这种结构中,由于运算过程中对序列进行舍入处理,这种有限字长效应有时会产生寄生振荡。相反,FIR 滤波器采用非递归结构,不存在稳定性的问题,运算误差也较小,此外 FIR 滤波器可以采用快速傅里叶变换算法,在相同阶数的条件下,运算速度快得多。

从设计工具看,IIR 滤波器可以借助模拟滤波器的成果,因此,一般都有有效的封闭形式的设计公式可供准确计算,计算工作量比较小,对计算工具的要求不高。FIR 滤波器一般没有封闭形式的设计公式。窗口法仅仅对窗口函数可以给出计算公式,但计算通带阻带衰减无显式表达式。一般 FIR 滤波器的设计只有计算程序可循,因此对计算工具要求较高。

另外也应看到,IIR 滤波器虽然设计简单。但主要是用于设计具有片段常数特性的滤波器,如低、高、带通及带阻等,往往脱离不了模拟滤波器的格局。而 FIR 滤波器则要灵活得多,尤其它能易于适应某些特殊的应用,如构成微分器或积分器,或用于巴特沃斯、切比雪夫等逼近不可能达到预定指标的情况。例如,由于某些原因要求三角形振幅响应或一些更复杂的幅频响应,因而有更大的适应性和更广阔的天地。

从上面的简单比较我们可以看到,IIR 和 FIR 滤波器各有所长,所以在实际应用时应该从多方面考虑来加以选择。例如,从使用要求上来看,在对相位要求不敏感的场合,如语言通信等,选用 IIR 较为合适,这样可以充分发挥其经济高效的特点,而对于图像信号处理、数据传输等以波形携带信息的系统,则对线性相位要求较高,采用 FIR 滤波器较好。当然,在实际应用中应考虑经济上的要求。

## 习 题 十 一

11.1-1 用直接 I 型和直接 II 型结构实现以下系统函数:

$$(1) H(z) = \frac{-5 + 2z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}} \quad (2) H(z) = \frac{-z + 2}{8z^2 - 2z - 3}$$

11.1-2 用级联型和并联型结构实现以下系统函数:

$$(1) H(z) = \frac{3z^3 - 3.5z^2 + 2.5z}{(z^2 - z + 1)(z - 0.5)} \quad (2) H(z) = \frac{4z^3 - 2.8284z^2 + z}{(z^2 - 1.4242z + 1)(z + 0.7071)}$$

11.1-3 用横截型和级联型结构实现系统函数

$$H(z) = (1 - 1.4142z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1})$$

11.2-1 思考题:

- (1) 数字滤波器的分类及特点。
- (2) 数字滤波器设计与模拟滤波器设计比较及各自的优缺点。
- (3) 分别描述用脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的过程。
- (4) 用脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的各自优缺点。

11.2-2 已知模拟滤波器的传输函数为

$$(1) H_a(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (2) H_a(s) = \frac{1}{2s^2 + 3s + 1}$$

$$(3) H_a(s) = \frac{16(s+2)}{(s+3)(s^2 + 2s + 5)} \quad (4) H_a(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2 + 2s + 3)(s+1)}$$

试采用脉冲响应不变法和双线性变换法分别将其转换为数字滤波器,设  $T = 2s$ 。



- 11.2-3 假设某模拟滤波器  $H_a(s)$  是一个低通滤波器, 又知  $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{z+1}{z-1}}$ , 数字滤波器  $H(z)$  的通带中心位于下面那种情况? 并说明原因。

(1)  $\Omega = 0$  (低通)。

(2)  $\Omega = \pi$  (高通)。

(3) 除 0 或  $\pi$  以外的某一频率(带通)。

- 11.2-4 在  $T = 0.125\text{ms}$  时, 利用脉冲响应不变法, 通过对一个通带截止频率  $f_p$  为  $2\text{kHz}$  的模拟低通滤波器进行变换, 设计一个 IIR 数字低通滤波器。如果没有混叠, 数字滤波器的归一化通带截止频率  $\Omega_p$  是什么? 如果使用双线性变换, 数字滤波器的归一化通带截止频率  $\Omega_p$  是什么?

- 11.2-5 一个 IIR 低通数字滤波器具有归一化的通带截止频率  $\Omega_p = 0.3\pi$ 。如果在  $T = 0.1\text{ms}$  时, 利用脉冲响应不变法来设计数字滤波器, 那么原型模拟低通滤波器的通带截止频率是什么? 如果在  $T = 0.1\text{ms}$  时, 利用双线性变换法来设计数字滤波器, 那么模拟低通原型滤波器的通带截止频率是什么?

- 11.3-1 用窗函数法设计一个阶数  $N = 24$  的线性相位 FIR 滤波器, 以逼近以下的理想频率响应幅度:

$$|H(\Omega)| = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq 0.2\pi \\ 0 & 0.2\pi < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

- 11.3-2 用窗函数法设计一个最少阶数高通滤波器, 阻带截止频率  $\Omega_s = 0.22\pi$ , 通带截止频率  $\Omega_p = 0.28\pi$ , 阻带波动  $\delta_s = 0.003$ 。

- 11.3-3 用矩形窗设计一个线性相位高通数字滤波器, 即

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j(\Omega-\pi)a} & \pi - \Omega_c \leq \Omega \leq \pi \\ 0 & 0 \leq \Omega \leq \pi - \Omega_c \end{cases}$$

(1) 求出  $h(n)$  的表达式, 确定  $a$  与  $N$  的关系。

(2) 问有几种类型? 分别是属于哪一种线性相位滤波器?

(3) 若改用升余弦窗设计, 求出  $h(n)$  的表达式。

- 11.3-4 用频率抽样法设计一个线性相位低通数字滤波器,  $N = 15$ , 幅度抽样值为

$$H_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0.5 & k = 1, 14 \\ 0 & k = 2, 3, \dots, 13 \end{cases}$$

设计抽样值的相位  $\theta(k)$ , 并求  $h(n)$  及  $H(\Omega)$  的表达式。

- 11.3-5 设某 FIR 数字滤波器的冲激响应  $h(0) = h(7) = 1, h(1) = h(6) = 3, h(2) = h(5) = 5, h(3) = h(4) = 6$  其他  $n$  值时  $h(n) = 0$ 。试求  $H(\Omega)$  的幅频响应和相频响应的表示式。

- 11.3-6 如果低通数字滤波器的频率响应为

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

对下列每一个相位值, 求出该滤波器的单位抽样响应。

(1)  $\phi(\Omega) = 0$

$$(2) \phi(\Omega) = \Omega a$$

$$(3) \phi(\Omega) = \begin{cases} \pi/2 & 0 \leq \Omega \leq \pi \\ -\pi/2 & -\pi \leq \Omega < 0 \end{cases}$$

- 11.3-7 用频率抽样法 1 设计一个线性相位带通数字滤波器,其上下边带截止频率分别为  $\Omega_1 = \pi/4, \Omega_2 = 3\pi/4$ 。不设过渡点,求  $N = 33$  或  $N = 34$  情况下的第一、二、三、四类线性相位滤波器的四种抽样值  $H(k)$ 。

- 11.3-8 根据下列技术指标,设计一个数字 FIR 低通滤波器。

$$\Omega_p = 0.2\pi, A_p = 0.25\text{dB}; \Omega_s = 0.4\pi, A_s = 50\text{dB}$$

选择一个恰当的窗函数,确定单位脉冲响应,绘出所设计的滤波器的幅度响应。

- 11.3-9 用频率抽样法 1,设计 1 型 FIR 低通滤波器,要求的技术指标为

$$\Omega_p = 0.3\pi, A_p = 5\text{dB}$$

$$\Omega_s = 0.4\pi, A_s = 40\text{dB}$$

- 11.3-10 用频率抽样法 2,设计 1 型 FIR 低通滤波器,要求的技术指标为

$$\Omega_p = 0.25\pi, A_p = 2\text{dB}$$

$$\Omega_s = 0.35\pi, A_s = 2\text{dB}$$

## 附录 A 部分分式展开

在线性时不变系统的各种分析方法中常遇到的函数都是某个变量的两个多项式之比。这样的函数就是有理分式函数。一个以  $x$  为变量的有理分式函数  $F(x)$  可以表示为

$$F(x) = \frac{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0} = \frac{N(x)}{D(x)} \quad (\text{A. 1})$$

若  $m \geq n$ , 函数  $F(x)$  是假分式; 若  $m < n$ , 则  $F(x)$  是真分式。一个假有理函数总可以化分为一个  $x$  的多项式和一个真分式之和。

假如

$$F(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 3} = \underbrace{2x^2 - 5x + 15}_{x \text{ 的多项式}} - \underbrace{\frac{43x + 45}{x^2 + 4x + 3}}_{\text{真分式}}$$

一个真分式又可进一步再展开成部分分式。下面将具体进行讨论。

### A. 1 无重根情况

假设  $F(x)$  为有理真分式, 并且  $F(x)$  的分母多项式  $D(x)$  的根全是单根, 记为  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ , 则式(A. 1) 可重写成

$$F(x) = \frac{N(x)}{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)} \quad (\text{A. 2})$$

容易证明上式又可改写成

$$F(x) = \frac{k_1}{(x - \lambda_1)} + \frac{k_2}{(x - \lambda_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(x - \lambda_n)} \quad (\text{A. 3})$$

为求系数  $k_1$ , 只要将式(A. 3) 的两边同乘  $(x - \lambda_1)$ , 并令  $x = \lambda_1$ ,

$$(x - \lambda_1)F(x) \Big|_{x=\lambda_1} = \left[ k_1 + \frac{k_2}{x - \lambda_2}(x - \lambda_1) + \cdots + x - \frac{k_n}{\lambda_n}(x - \lambda_1) \right] \Big|_{x=\lambda_1}$$

在上式右边除  $k_1$  外其余各项均为零。因此,

$$k_1 = (x - \lambda_1)F(x) \Big|_{x=\lambda_1} \quad (\text{A. 4})$$

同样可证明

$$k_i = (x - \lambda_i)F(x) \Big|_{x=\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (\text{A. 5})$$

上式也可以看作是直接在式(A. 2) 分母中划去  $(x - \lambda_i)$  的因子后, 然后在剩余的表达式中代入  $x = \lambda_i$  即可。这种方法称为留数法, 也称为 Heaviside(海维赛德) 展开定理。

**【例 A. 1】** 将下面有理真分式  $F(x)$  展开为部分分式:

$$F(x) = \frac{4x + 9}{x^2 + 5x + 6}$$

解:

$$F(x) = \frac{4x + 9}{x^2 + 5x + 6} = \frac{4x + 9}{(x + 2)(x + 3)} \quad (\text{A. 6})$$

从式(A.6)中划去 $(x+2)$ ,再在剩余表达式中代入 $x=-2$ ,即可得

$$k_1 = \frac{4x+9}{(x+3)} \Big|_{x=-2} = 1$$

同样,从式(A.6)中划去 $(x+3)$ ,再在剩余表达式中代入,即可得

$$k_2 = \frac{4x+9}{(x+2)} \Big|_{x=-3} = 3$$

因此,

$$F(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

## A.2 重根情况

如果有理真分式 $F(x)$ 的分母多项式 $D(x)$ 有一个 $r$ 阶重根,其余都是单根,即

$$F(x) = \frac{N(x)}{(x-\lambda_1)^r(x-\lambda_{r+1})\cdots(x-\lambda_n)} \quad (\text{A.7})$$

容易证明其部分分式展开形式为

$$F(x) = \frac{a_0}{(x-\lambda_1)^r} + \frac{a_1}{(x-\lambda_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{a_{r-1}}{(x-\lambda_1)} + \frac{k_{r+1}}{x-\lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{k_n}{(x-\lambda_n)} \quad (\text{A.8})$$

对于单根 $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_n$ 等项的系数 $k_{r+1}, \cdots, k_n$ 可以用A.1节中提供的留数法求解。下面讨论 $r$ 阶重根 $\lambda_1$ 所对应的 $r$ 个系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}$ 的求法。

将式(A.7)的两边乘 $(x-\lambda_1)^r$ 可得

$$\begin{aligned} (x-\lambda_1)^r F(x) &= a_0 + a_1(x-\lambda_1) + \cdots + a_{r-1}(x-\lambda_1)^{r-1} + \frac{k_{r+1}}{(x-\lambda_{r+1})}(x-\lambda_1)^r \\ &\quad + \cdots + \frac{k_n}{(x-\lambda_n)}(x-\lambda_1)^r \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

在上式中直接令 $x = \lambda_1$ ,可得

$$a_0 = (x-\lambda_1)^r F(x) \Big|_{x=\lambda_1} \quad (\text{A.10})$$

因此在 $F(x)$ 中划去因式 $(x-\lambda_1)^r$ ,并在余下的表达式中令 $x = \lambda_1$ ,就可求得 $a_0$ (即留数法)。如果将式(A.10)对 $x$ 求微分,那么右边就是 $a_1$ 加上在分子中含因式 $(x-\lambda_1)$ 的各项。再令 $x = \lambda_1$ 可得到

$$a_1 = \frac{d}{dx}[(x-\lambda_1)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda_1} \quad (\text{A.11})$$

依照此方法继续下去可求得

$$a_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i}[(x-\lambda_1)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda_1}, i = 0, 1, \cdots, (r-1) \quad (\text{A.12})$$

**【例 A.2】** 将下面 $F(x)$ 展开成部分分式

$$F(x) = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+1)^3(x+2)}$$

$$\text{解: } F(x) = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{a_0}{(x+1)^3} + \frac{a_1}{(x+1)^2} + \frac{a_2}{(x+1)} + \frac{k_4}{x+2}$$

由留数法可得

$$k_4 = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+1)^3} \Big|_{x=-2} = 1$$

在  $F(x)$  中划去因式  $(x+1)^3$ , 对余下的表达式中令  $x = -1$ , 可得

$$a_0 = (x+1)^3 F(x) \Big|_{x=-1} = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+2)} \Big|_{x=-1} = 2$$

在  $F(x)$  中划去因式  $(x+1)^3$ , 对余下的表达式求导, 再令  $x = -1$ , 可得

$$a_1 = \frac{d}{dx} \left[ \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+2)} \right] \Big|_{x=-1} = 1$$

同理

$$a_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+2)} \right] \Big|_{x=-1} = 3$$

因此

$$F(x) = \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)} + \frac{1}{x+2}$$

对于多重根, 尤其是高阶的情况下, 留数法要求重复微分, 这是比较麻烦的。这里介绍一种消去分式法求多重根的系数。消去分式法的原理是方程两边相同幂次系数相等。对于含有几个重根和非重根的有理真分式, 可将留数法和消去分式法混合使用, 比较简单的系数用留数法求, 而剩下的系数则用消去分式法求。现在将例 A. 2 再作一次, 以说明这一过程。

**【例 A. 3】** 将下面  $F(x)$  展开为部分分式:

$$F(x) = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+1)^3(x+2)}$$

$$\text{解: } F(x) = \frac{4x^3 + 16x^2 + 23x + 13}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{a_0}{(x+1)^3} + \frac{a_1}{(x+1)^2} + \frac{a_2}{(x+1)} + \frac{k_4}{x+2}$$

系数  $a_0$  和  $k_4$  相对简单, 可由留数法求出,  $k_4 = 1, a_0 = 2$ 。因此

$$F(x) = \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{a_1}{(x+1)^2} + \frac{a_2}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

将该方程两边各乘以  $(x+1)^3(x+2)$  以消去分式, 得出

$$\begin{aligned} 4x^3 + 16x^2 + 23x + 13 &= 2(x+2) + a_1(x+1)(x+2) + a_2(x+1)^2(x+2) + (x+1)^3 \\ &= (1+a_2)x^3 + (a_1+4a_2+3)x^2 + (5+3a_1+5a_2)x + (4+2a_1+2a_2+1) \end{aligned}$$

令两边  $x$  的三次幂和二次幂的系数相等可得到

$$\begin{cases} 1+a_2 = 4 \\ a_1+4a_2+3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

因此,

$$F(x) = \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

与前面结果一致。

### A. 3 复根情况

上面叙述的求展开系数的方法, 无论对实根还是复根都是适用的。但对于  $D(x)$  存在复根

的情况,进一步的分析将使展开系数的求解更为方便。

**【例 A. 4】** 求下面  $F(x)$  的部分分式展开:

$$F(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x^2+4x+5)}$$

解:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2x+3}{(x+1)(x^2+4x+5)} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+2-j)(x+2+j)} \\ &= \frac{k_2}{x+2-j} + \frac{k_3}{x+2+j} + \frac{k_1}{x+1} \end{aligned}$$

由留数法,  $k_1$  可得

$$k_1 = \left. \frac{2x+3}{(x^2+4x+5)} \right|_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = \left. \frac{2x+3}{(x+1)(x+2+j)} \right|_{x=-2-j} = -\frac{1}{4} + j\frac{3}{4}$$

$$k_3 = \left. \frac{2x+3}{(x+1)(x+2-j)} \right|_{x=-2-j} = -\frac{1}{4} - j\frac{3}{4}$$

因此

$$F(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{4} + j\frac{3}{4}}{x+2-j} + \frac{-\frac{1}{4} - j\frac{3}{4}}{x+2+j}$$

对应于复数共轭因式的系数  $k_2$  和  $k_3$  也是互为共轭的。当有理函数的系数是实数时,这个结论总是对的。在这种情况下只需计算其中一个就行了。

当然,这样得出的展开式呈现了复数形式,无论系数还是由展开式求相应的信号形式都不方便。一种避免出现复数形式的方法是对共轭复根只分解到二次因式。我们下面举例说明。

**【例 A. 5】** 求下面  $F(x)$  的部分分式展开:

$$F(x) = \frac{x+3}{x^2+3x^2+6x+4}$$

解:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x+3}{x^2+3x^2+6x+4} = \frac{x+3}{(x+1)(x^2+2x+4)} \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+2x+4} + \frac{C}{x+1} \end{aligned}$$

其中,  $C$  利用留数法可求得为  $C = \left. \frac{x+3}{x^2+2x+4} \right|_{x=-1} = \frac{2}{3}$ ,  $A$  和  $B$  的值可利用消去分式法求出。

$$x+3 = (Ax+B)(x+1) + \frac{2}{3}(x^2+2x+4) = \left(A+\frac{2}{3}\right)x^2 + \left(B+\frac{4}{3}+A\right)x + \frac{8}{3}+B$$

令同次幂相等, 得到  $A = -\frac{2}{3}$ ,  $B = \frac{1}{3}$ , 最后有

$$F(x) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1-2x}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1} \right]$$

## 附录 B 常用数学用表

### B.1 洛必达(L'Hôpital) 法则

若对  $f(x)/g(x)$  求极限,产生  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  的不定形式,那么

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### B.2 泰勒(Taylor) 和马克劳林(Maclaurin) 级数

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots$$

### B.3 幂级数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad x^2 < \pi^2/4$$

$$\cot x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots \quad x^2 < \pi^2/4$$

$$(1+x^n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + x^n$$

$$\approx 1 + nx \quad |x| \ll 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

### B.4 求和公式

$$\sum_{k=m}^n r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n kr^k = \frac{r + [n(r-1) - 1]r^{n+1}}{(r-1)^2} \quad r \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 r^2 = \frac{r[(1+r)(1-r^n)] - 2n(1-r)r^n - n^2(1-r)^2 r^n}{n} \quad r \neq 1$$

## B.5 复数

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$$

$$e^{\pm j\frac{n\pi}{2}} = \begin{cases} \pm j & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ \mp j & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

$$e^{\pm jn\pi} = \begin{cases} 1 & n \text{ 为偶} \\ -1 & n \text{ 为奇} \end{cases}$$

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

$$a + jb = re^{j\theta} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$(re^{j\theta})^r = r^k e^{jk\theta}$$

$$\frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$(r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

## B.6 三角恒等式

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j\sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}[e^{jx} + e^{-jx}]$$

$$\sin x = \frac{1}{2j}[e^{jx} - e^{-jx}]$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \cos x$$

$$2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$



$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

$$a \cos x + b \sin x = c \cos(x + \theta) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right)$$

## B.7 不定积分

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad \int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax \cos ax)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \sin ax)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax \sin ax + 2\cos ax - a^2 x^2 \cos ax)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax - 2\sin ax + a^2 x^2 \sin ax)$$

$$\int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \cos bx dx = -\left[ \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \right] \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \\ \int x e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \\ \int x^2 e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \\ \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) \\ \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \\ \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)\end{aligned}$$

## B.8 定积分

$$\begin{aligned}(1) \int_0^\infty \left( \frac{a}{a^2 + x^2} \right) dx &= \frac{\pi}{2} \quad a > 0 \\ (2) \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \quad a > 0, n \text{ 为整数} \\ (3) \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx &= \sqrt{\pi}/2a \quad a > 0 \\ (4) \int_0^\pi \sin^2(nx) dx &= \int_0^\pi \cos^2(nx) dx = \pi/2 \quad n \text{ 为整数} \\ (5) \int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx &= \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = 0, n \text{ 和 } m \text{ 是不相等的整数} \\ (6) \int_0^\pi \sin(nx) \cos(mx) dx &= \begin{cases} 2n/(n^2 - m^2) & n - m = \text{奇数} \\ 0 & n - m = \text{偶数} \end{cases} \\ (7) \int_0^\infty \operatorname{sinc}(ax) dx &= 1/2a \quad a > 0 \\ (8) \int_0^\infty \operatorname{sinc}^2(ax) dx &= 1/2a \quad a > 0 \\ (9) \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx &= \frac{b}{a^2 + b^2} \quad a > 0 \\ (10) \int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx &= \frac{b}{a^2 + b^2} \quad a > 0 \\ (11) \int_0^\infty f(x) \left[ \frac{dg(x)}{dx} \right] dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) \left[ \frac{df(x)}{dx} \right] dx\end{aligned}$$

## B.9 常用导数公式

$$\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{du} f(u) \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log(ax) = \frac{\log e}{x}$$

$$\frac{d}{dx} e^{bx} = b e^{bx}$$

$$\frac{d}{dx} a^{bx} = b(\ln a) a^{bx}$$

$$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax$$

$$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax$$

$$\frac{d}{dx} \tan ax = \frac{a}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{d}{dx} (\arcsin ax) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\arccos ax) = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\arctan ax) = \frac{a}{1+a^2x^2}$$

## 附录 C 模拟滤波器设计 MATLAB 程序

### C.1 Butterworth 低通模拟滤波器设计 MATLAB 例程

```
Wp = 0.2 * pi; % Wp = 通带边缘频率(rad/sec); Wp > 0
Ws = 0.3 * pi; % Ws = 阻带边缘频率(rad/sec); Ws > Wp > 0
Rp = 7; % Rp = 通带最大波纹(+ dB); (Rp > 0)
As = 16; % As = 阻带最大衰减(+ dB); (As > 0)
% 根据上述参数计算滤波器阶数
N = ceil((log10((10^(Rp/10) - 1)/(10^(As/10) - 1)))/(2 * log10(Wp/Ws)));
%% * * * Butterworth Filter Order = 3

Ripple = 10 ^ (-Rp/20); %dB 转换
Attn = 10 ^ (-As/20); % dB 转换
OmegaC = Wp/((10^(Rp/10) - 1)^(1/(2 * N))); % 滤波器截止频率
[z,p,k] = buttap(N); % 归一化 Butterworth 低通模拟滤波器的设计
% 下面进行逆归一化处理
p = p * OmegaC;
k = k * OmegaC^N;
B = real(poly(z));
b0 = k;
b = k * B; % b = Butterworth 低通模拟滤波器传输函数 Ha(s) 分子的系数
a = real(poly(p)); % a = Butterworth 低通模拟滤波器传输函数 Ha(s) 分母的系数
% 频率响应的计算
[db,mag,pha,w] = freqs_m(b,a,0.5 * pi); % freqs_m 为 MATLAB 内置函数
% 画图
subplot(3,1,1); plot(w,mag);title('幅频响应')
xlabel('模拟频率'); ylabel('| H | '); axis([0,2,0,1.1])
subplot(3,1,2); plot(w,db);title('幅频响应(dB) ')
xlabel('模拟频率'); ylabel('分贝'); axis([0,2,-30,5])
subplot(3,1,3); plot(w,pha/pi); title('相频响应')
xlabel('模拟频率'); ylabel('弧度'); axis([0,2,-1,1])
```

### C.2 Chebyshev\_I 低通模拟滤波器设计 MATLAB 例程

```
Wp = 0.2 * pi; % Wp = 通带边缘频率(rad/sec); Wp > 0
```

```

Ws = 0.3 * pi; % Ws = 阻带边缘频率(rad/sec); Ws > Wp > 0
Rp = 1; % Rp = 通带最大波纹(+ dB); (Rp > 0)
As = 16; % As = 阻带最大衰减(+ dB); (As > 0)
ep = sqrt(10^(Rp/10) - 1);
A = 10^(As/20);
OmegaC = Wp;
OmegaR = Ws/Wp;
g = sqrt(A * A - 1)/ep;
% 计算滤波器阶数
N = ceil(log10(g + sqrt(g * g - 1))/log10(OmegaR + sqrt(OmegaR * OmegaR - 1)));
%% * * * Chebyshev - 1 Filter Order = 4

Ripple = 10 ^ (-Rp/20); %dB 转换
Attn = 10 ^ (-As/20); % dB 转换
[z,p,k] = cheblap(N,Rp); % 归一化 Chebyshev_I 低通模拟滤波器的设计
% 下面进行逆归一化处理
a = real(poly(p));
aNn = a(N+1);
p = p * OmegaC;
a = real(poly(p)); % a = Chebyshev_I 低通模拟滤波器传输函数 Ha(s) 分母的系数
aNu = a(N+1);
k = k * aNu/aNn;
b0 = k;
B = real(poly(z));
b = k * B; % b = Chebyshev_I 低通模拟滤波器传输函数 Ha(s) 分子的系数

% 频率响应的计算
[db,mag,pha,w] = freqs_m(b,a,0.5 * pi); % freqs_m 为 MATLAB 内置函数

% 画图
subplot(3,1,1); plot(w,mag);title('幅频响应')
xlabel('模拟频率'); ylabel('| H | '); axis([0,2,0,1.1])
subplot(3,1,2); plot(w,db);title('幅频响应(dB)')
xlabel('模拟频率'); ylabel('分贝'); axis([0,2,-45,5])
subplot(3,1,3); plot(w,pha/pi); title('相频响应')
xlabel('模拟频率'); ylabel('弧度'); axis([0,2,-1,1])

```

### C.3 Chebyshev\_II 低通模拟滤波器设计 MATLAB 例程

```

Wp = 0.2 * pi; % Wp = 通带边缘频率(rad/sec); Wp > 0

```

```

Ws = 0.3 * pi; % Ws = 阻带边缘频率(rad/sec); Ws > Wp > 0
Rp = 1; % Rp = 通带最大波纹(+ dB); (Rp > 0)
As = 16; % As = 阻带最大衰减(+ dB); (As > 0)
ep = sqrt(10^(Rp/10) - 1);
A = 10^(As/20);
OmegaC = Wp;
OmegaR = Ws/Wp;
g = sqrt(A * A - 1)/ep;
% 计算滤波器阶数
N = ceil(log10(g + sqrt(g * g - 1))/log10(OmegaR + sqrt(OmegaR * OmegaR - 1)));
%% * * * Chebyshev - 2 Filter Order = 4

Ripple = 10 ^ (- Rp/20); %dB 转换
Attn = 10 ^ (- As/20); %dB 转换
[z,p,k] = cheb2ap(N,As); % 归一化 Chebyshev_II 低通模拟滤波器的设计
% 下面进行逆归一化处理
a = real(poly(p));
aNn = a(N + 1);
p = p * OmegaC;
a = real(poly(p)); % a = Chebyshev_II 低通模拟滤波器传输函数 Ha(s) 分母的系数
aNu = a(N + 1);
b = real(poly(z));
M = length(b);
bNn = b(M);
z = z * OmegaC;
b = real(poly(z));
bNu = b(M);
k = k * (aNu * bNn)/(aNn * bNu);
b0 = k;
b = k * b; %b = Chebyshev_II 低通模拟滤波器传输函数 Ha(s) 分子的系数

% 频率响应的计算
[db,mag,pha,w] = freqs_m(b,a,0.5 * pi); % freqs_m 为 MATLAB 内置函数
% 画图
subplot(3,1,1); plot(w,mag);title('幅频响应')
xlabel('模拟频率'); ylabel('| H | '); axis([0,2,0,1.1])
subplot(3,1,2); plot(w,db);title('幅频响应(dB) ')
xlabel('模拟频率'); ylabel('分贝'); axis([0,2,-45,5])
subplot(3,1,3); plot(w,pha/pi); title('相频响应')
xlabel('模拟频率'); ylabel('弧度'); axis([0,2,-1,1])

```

## 附录 D FIR 滤波器设计例程

### D.1 设计数字 FIR 低通滤波器

根据窗函数最小阻带衰减的特性,只有海明窗和布莱克曼窗可提供大于 50dB 的衰减。故选择海明窗,它提供较小的过渡带,因此具有较小的阶数。

```
% 数字低通滤波器的窗函数设计
wp = 0.2 * pi; wr = 0.4 * pi;
tr_width = wr - wp; % 过渡带宽
N = ceil(6.6 * pi / tr_width) + 1; % 滤波器的长度, N = 奇数为 1 型, N = 偶数为 2 型
n = 0:1:N - 1;
wc = (wr + wp) / 2; % 理想低通滤波器的截止频率
hd = ideal_lp(wc, N); % 理想低通滤波器的单位脉冲响应
w_ham = (hamming(N)); % 海明窗
h = hd. * w_ham; % 截取得到实际单位脉冲响应
[db, mag, pha, w] = freqz_m(h, [1]); % 计算实际滤波器的幅度响应
delta_w = 2 * pi / 1000;
Ap = - (min(db(1:1:wp / delta_w + 1))); % 实际通带波动
Ar = - round(max(db(wr / delta_w + 1:1:501))); % 最小阻带衰减
subplot(221); stem(n, hd); title('理想单位脉冲响应 hd(n)');
subplot(222); stem(n, w_ham); title('海明窗 w(n)');
subplot(223); stem(n, h); title('单位脉冲响应 h(n)');
subplot(224); plot(w / pi, db); title('幅度响应 (dB)');
axis([0, 1, -100, 10]);
```

### D.2 用频率抽样法 1 设计 1 型 FIR 低通滤波器

选择  $N = 21$ , 则  $R_p$  在  $k = 3$  附近,  $R_r$  在  $k = 4$  附近。

$$|H(k)| = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{20\pi}{21}k, & k = 0, 1, \dots, 10 \\ \frac{20\pi}{21}(21 - k), & k = 12, 13, \dots, 20 \end{cases}$$
$$H(k) = |H(k)| e^{j\theta(k)}$$

$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)] = \begin{cases} -0.0414, 0, 0.0443, 0.0476, 0, -0.0606, -0.0732, 0, 0.1399, \\ 0.2767, 0.3333, 0.2767, 0.1399, 0, -0.0732, -0.0606, 0, \\ 0.0476, 0.0433, 0, -0.0414 \end{cases}$$

MATLAB 实现如下:

```
% 频率抽样法设计低通滤波器(N = 21)
N = 21; alpha = (N - 1)/2; l = 0:N - 1; w1 = (2 * pi/N) * 1;
Hrs = [ones(1,4), zeros(1,14), ones(1,3)]; % 理想振幅响应抽样
Hdr = [1,1,0,0,1,1]; wd1 = [0,0.35,0.35,1.65,1.65,2]; % 理想振幅响应
k1 = 0:floor((N - 1)/2); k2 = floor((N - 1)/2) + 1:N - 1; % k 取整数
angH = [-alpha * (2 * pi)/N * k1, alpha * (2 * pi)/N * (N - k2)];
% 相位约束条件
H = Hrs. * exp(j * angH); % 构成 H(k)
h = real(ifft(H,N)); % 实际单位脉冲响应
[db,mag,pha,w] = freqz_m(h,[1]);
[Hr,ww,a,L] = hr_type1(h); % 实际振幅响应
Ar = -round(max(db(200:1:501)));
subplot(221); plot(w1/pi, Hrs, 'l', wd1, Hdr); title('频率样本 H(k); N = 21');
subplot(222); stem(l,h); title('实际单位脉冲响应 h(n)');
subplot(223); plot(ww/pi, Hr, w1/pi, Hrs, 'l'); title('实际振幅响应 H(w)');
subplot(224); plot(w/pi, db); title('幅度响应(dB)');
```

从上面程序得到的幅度响应曲线可见,  $N = 21$  时, 最小的阻带衰减为 14dB, 没有达到设计要求。

增大抽样点数,  $N = 61$  时, 最小的阻带衰减为 18dB, 仍不满足指标。

因此, 在过渡带上加上两个过渡抽样点 T1 和 T2, MATLAB 实现如下:

```
% 加过渡点的频率抽样法设计低通滤波器(1 型)(N = 61)
N = 61; alpha = (N - 1)/2; l = 0:N - 1; w1 = (2 * pi/N) * 1; T1 = 0.7; T2 = 0.2;
Hrs = [ones(1,10), T1, T2, zeros(1,38), T2, T1, ones(1,9)]; % 理想振幅响应抽样
Hdr = [1,1,0,0,1,1]; wd1 = [0,0.35,0.35,1.65,1.65,2]; % 理想振幅响应
k1 = 0:floor((N - 1)/2); k2 = floor((N - 1)/2) + 1:N - 1; % k 取整数
angH = [-alpha * (2 * pi)/N * k1, alpha * (2 * pi)/N * (N - k2)]; % 相位约束条件
H = Hrs. * exp(j * angH); % 构成 H(k)
h = real(ifft(H,N)); % 实际单位脉冲响应
[db,mag,pha,w] = freqz_m(h,[1]);
[Hr,ww,a,L] = hr_type1(h); % 实际振幅响应
Ar = -round(max(db(200:1:501)));
subplot(221); plot(w1/pi, Hrs, 'l', wd1, Hdr); title('频率样本 H(k); N = 61');
subplot(222); stem(l,h); title('实际单位脉冲响应 h(n)');
subplot(223); plot(ww/pi, Hr, w1/pi, Hrs, 'l'); title('实际振幅响应 H(w)');
subplot(224); plot(w/pi, db); title('幅度响应(dB)');
```



从幅度响应曲线可见,  $N = 61$  时, 最小的阻带衰减为 45dB, 达到设计要求。

### D.3 用频率抽样法 2 设计 1 型 FIR 低通滤波器

选择  $N = 41$ , 则  $\Omega_p$  在  $k = 5$  附近,  $\Omega_r$  在  $k = 7$  附近。

```
% 频率抽样法 2 设计低通滤波器(N = 41)
N = 41; alpha = (N - 1)/2; l = 0:N - 1; w1 = (2 * pi/N) * 1;
Hrs = [ones(1,6), 0.1, zeros(1,27), 0.1, ones(1,6)]; % 理想振幅响应抽样
Hdr = [1, 1, 0, 0]; wdl = [0, 0.3, 0.3, 1]; % 理想振幅响应
k1 = 0:floor((N - 1)/2); k2 = floor((N - 1)/2) + 1:N - 1; % k 取整数
angH = [-alpha * (2 * pi)/N * (k1 + 0.5), alpha * (2 * pi)/N * (N - k2 - 0.5)];
% 相位约束条件
H = Hrs. * exp(j * angH); % 构成 H(k)
h1 = ifft(H, N); n = 0:1:N - 1;
h = real(h1. * exp(j * pi * n/N)); % 实际单位脉冲响应
[db, mag, pha, w] = freqz_m(h, [1]);
[Hr, ww, a, L] = hr_type1(h); % 实际振幅响应
subplot(221); plot(w1/pi + 1/N, Hrs, 'l', wdl, Hdr); title('频率样本 H(k): N = 41');
subplot(222); stem(1, h); title('实际单位脉冲响应 h(n)');
subplot(223); plot(ww/pi, Hr, w1/pi + 1/N, Hrs, 'l'); title('实际振幅响应 H(w)');
subplot(224); plot(w/pi, db); title('幅度响应(dB)');
axis([0 1 - 80 10]);
```

## 部分习题参考答案

### 习题一

- 1.1-1 (3)、(6) 是对的；(1)、(2)、(4)、(5) 是错的。
- 1.1-2 (1) 非周期的功率信号,  $P = 6.25$ ; (2) 非周期的能量信号,  $E = 8$ ; (3) 周期的功率信号,  $P = 62.5$
- 1.1-3 (1)、(4) 周期均为 4; (2)、(3) 为非周期的。
- 1.2-5 (1)  $x(t_0)\delta(t)$ ; (2)  $\frac{1}{2}\delta(t)$ ; (3)  $\frac{1}{2}\delta(t)$ ; (4)  $\frac{1}{2-3j}\delta(\omega+3)$ ; (5)  $k\delta(\omega)$ ; (6)  $\delta'(t)$ ; (7)  $x(t)$ ; (8)  $e^{-3}$ ; (9) 0; (10)  $1/2$ ; (11) 0; (12)  $\delta(t) + u(t)$ 。
- 1.5-1 (1) 线性、时不变; (2) 非线性、时不变; (3) 非线性、时变; (4) 非线性、时不变; (5) 非线性、时变。
- 1.5-2 (1) 非线性、时不变; (2) 非线性、时变; (3) 非线性、时不变; (4) 非线性、时不变; (5) 线性、时变; (6) 线性、时变。
- 1.5-3 (1) 非线性、时不变、无记忆、因果、稳定; (2) 线性、时变、记忆、非因果、稳定; (3) 线性、时变、记忆、非因果、稳定; (4) 线性、时变、记忆、非因果、不稳定; (5) 非线性、时不变、记忆、因果、稳定; (6) 线性、时变、记忆、非因果、稳定; (7) 线性、时不变、记忆、非因果、稳定; (8) 线性、时变、无记忆、因果、不稳定。
- 1.5-4  $y(t) = 4\cos 2t - e^{-t} \quad t > 0$

### 习题二

- 2.1-1 (a)  $2 \frac{d^4}{dt^4} i_1(t) + 5 \frac{d^3}{dt^3} i_1(t) + 5 \frac{d^2}{dt^2} i_1(t) + 3 \frac{d}{dt} i_1(t) = 2 \frac{d^3}{dt^3} x(t) \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{d}{dt} x(t)$
- $2 \frac{d^4}{dt^4} i_2(t) + 5 \frac{d^3}{dt^3} i_2(t) + 5 \frac{d^2}{dt^2} i_2(t) + 3 \frac{d}{dt} i_2(t) = \frac{d}{dt} x(t)$
- $2 \frac{d^4}{dt^4} u_0(t) + 5 \frac{d^3}{dt^3} u_0(t) + 5 \frac{d^2}{dt^2} u_0(t) + 3 \frac{d}{dt} u_0(t) = 2 \frac{d^2}{dt^2} x(t)$
- (b)  $2 \frac{d^2}{dt^2} i_1(t) + 7 \frac{d}{dt} i_1(t) + 5 i_1(t) = 2 \frac{d^2}{dt^2} I(t) + \frac{d}{dt} I(t) + 2 I(t)$
- $2 \frac{d^2}{dt^2} i_2(t) + 7 \frac{d}{dt} i_2(t) + 5 i_2(t) + 6 \frac{d}{dt} I(t)$
- $2 \frac{d^2}{dt^2} u_0(t) + 7 \frac{d}{dt} u_0(t) + 5 u_0(t) = 6 I(t)$

$$(c) 4 \frac{d^2}{dt^2} i_1(t) + 6 \frac{d}{dt} i_1(t) + 4 i_1(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t)$$

$$4 \frac{d^2}{dt^2} i_2(t) + 6 \frac{d}{dt} i_2(t) + 4 i_2(t) = 2 \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$4 \frac{d^2}{dt^2} u_0(t) + 6 \frac{d}{dt} u_0(t) + 4 u_0(t) = 2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 6 \frac{d}{dt} x(t) + 2 x(t)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} v_2(t) + \frac{m_1 f_2 + m_2 f_1}{m_1 m_2} \frac{d^2}{dt^2} v_2(t) + \frac{f_1 f_2 + k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \frac{d}{dt} v_2(t) +$$

$$\frac{k(f_1 + f_2)}{m_1 m_2} v_2(t) = \frac{k}{m_1 m_2} x(t)$$

$$2.2-3 \quad (1) (45e^{-3t} - 25e^{-2t} - 8e^{-t})u(t)$$

$$(2) (-5e^{-2t} + 7e^{-t})u(t)$$

$$(3) (-3e^{-2t} + 2te^{-2t} + 5e^{-t})u(t)$$

$$2.2-4 \quad (1) \left( \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{6} \right) u(t)$$

$$(2) \left( \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{-t} \right) u(t)$$

$$(3) [(2-t)e^{-3t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

$$2.2-5 \quad (1) y(0^+) = y(0^-) = 1, y'(0^+) = 3$$

$$(2) y(0^+) = y(0^-) = 2, y'(0^+) = 2$$

$$2.2-6 \quad y(t) = -2e^{-3t} + 1 + 2e^{-t} \quad t \geq 0$$

$$y_{zi}(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \quad t \geq 0$$

$$y_{zs}(t) = 2e^{-t} - 3e^{-2t} + 1 \quad t \geq 0$$

$$y_n(t) = -2e^{-3t} \quad t \geq 0$$

$$y_f(t) = 1 + 2e^{-t}$$

$$2.2-1 \quad y(n+2) - 1.7y(n+1) + 0.72y(n) = 0.02x(n), y(0) = 0, y(1) = 0.3$$

$$2.2-2 \quad (a) y(n+2) + 3y(n+1) + 5y(n) = x(n)$$

$$(b) y(n) - 4y(n-1) - 5y(n-2) = 3(x)n + 2x(n-1)$$

$$2.2-3 \quad y(n) = 2 \left( \frac{4}{5} \right)^n$$

$$2.2-4 \quad y(n) = 28(2)^n - \frac{13}{2}(3)^n - 6n - \frac{35}{2} \quad n \geq 0$$

$$2.2-5 \quad (1) \left( \frac{1}{2} \right)^n, n \geq 0; \quad (2) 2^{n-1}, n \geq 0$$

$$(3) [2(-1)^n - (-2)^{n+2}], n \geq 0; \quad (4) (1+2n)(-1)^n, n \geq 0$$

$$(5) \cos \frac{n\pi}{2} + 2\sin \frac{n\pi}{2}, n \geq 0; (6) \frac{1}{3}n - \frac{4}{9} + \frac{13}{9}(-2)^n, n \geq 0;$$

$$(7) 2^{n+1} - 2, n \geq 0; \quad (8) \frac{3}{4}3^n - \frac{3}{4}(-1)^n - \frac{5}{3}n(-1)^n, n \geq 0$$

$$2.2-6 \quad y(n) = \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n \quad n \geq 0$$

$$y_n(n) = \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n \quad n \geq 0$$

$$y_f(n) = \frac{1}{3}(2)^n \quad n \geq 0$$

$$y_{zi}(n) = (-1)^n - 2(-2)^n \quad n \geq 0$$

$$y_{zs}(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n \quad n \geq 0$$

$$2.3-1 (1) e^{-2t}u(t)$$

$$(2) 2\delta(t) - 4e^{-2t}u(t)$$

$$(3) 2\delta'(t) - \delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$$

$$2.3-2 \quad h(n) = 2^n u(n)$$

$$2.3-3 \quad (1) (3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-1)$$

$$(2) \left[ \frac{9}{10}3^n + \frac{4}{15}(-2)^n - \frac{1}{6} \right] u(t)$$

$$(3) 4\delta(n) + (2n-4)(0.5^n)u(n)$$

$$2.3-4 \quad y(n) - \frac{1}{2}y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

$$2.4-1 \quad (1) \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

$$(2) \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$(3) \frac{1}{a}[1 - e^{-a(t-2)}]u(t-2)$$

$$(4) \frac{1}{\pi}[1 - \cos\pi(t+1)]u(t+1) + \frac{1}{\pi}[1 - \cos\pi(t-1)]u(t-1)$$

$$(5) -2\sin \omega t \sin \omega$$

$$(6) 8(1 - e^{-t})u(t) - 8(1 - e^{-(t-2)})u(t-2) +$$

$$8(e^{-t} - e^{-3})u(t-3) + 8(e^{-3} - e^{-(t-2)})u(t-5)$$

$$(7) \left[ \frac{1}{2}(t-1)^2 - t + \frac{3}{2} \right] u(t-2) - \left[ \frac{1}{2}(t-4)^2 - t + \frac{9}{2} \right] u(t-5) - \\ \left[ \frac{1}{2}(t-1)^2 - t - 3 \right] u(t-5) + \left[ \frac{1}{2}(t-4)^2 - t \right] u(t-8)$$

$$2.4-4 \quad (\omega_0 \cos \omega_0 t + 5 \sin \omega_0 t) u(t)$$

$$2.4-6 \quad (1) u(t) - u(t-1)$$

$$(2) \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) - \frac{1}{2}[1 - e^{-2(t-1)}]u(t-1)$$

$$2.4-7 \quad y_x(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$y_f(t) = \left( \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} \right) u(t)$$

$$\text{固有响应: } \frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$\text{强迫响应: } \frac{1}{6}e^{-4t} \quad t \geq 0$$

$$\text{瞬态响应: } \frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} \quad t \geq 0$$

$$\text{稳态响应: } 0$$

$$2.5-1 \quad (1) \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\}_0$$

$$(2) \{2, 6, 12, 20, 30, 42, 54, 64, 58, 50, 40, 28, 14\}_1$$

$$2.5-2 \quad (1) \{1, 2, 3, 3, 3, 2, 1\}_{-3}$$

$$(2) \{3, 5, 6, 6, 6, 3, 1\}_{-2}$$

$$(3) \{3, -1, 2, -2, -1, -1\}_0$$

$$(4) \{3, 2, 1, 0, 3, 2, 1\}_{-2}$$

$$2.5-3 \quad (1) (n+1)u(n)$$

$$(2) \left[ 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] u(n)$$

$$(3) (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n)$$

$$(4) 2^{n+1}u(-n) + 2u(n-1)$$

$$(5) \frac{8}{9} \left( -\frac{1}{8} \right)^{n-2} 4^n u(n-6) + \frac{8}{9} \left( -\frac{1}{8} \right)^4 4^n u(-n+5)$$

$$2.5-4 \quad x_1(1) * x_2(1) = 12, x_1(4) * x_2(4) = 30, x_1(6) * x_2(6) = 36$$

$$x_1(8) * x_2(8) = 30, x_1(11) * x_2(11) = 12, x_1(13) * x_2(13) = 0$$

$$2.5-5 \quad 5[1 - (0.8)^{n+1}]u(n) - 5[1 - (0.8)^{n-2}]u(n-3)$$

$$2.5-6 \quad h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$2.5-7 \quad h(n) = \left[-\frac{25}{28}(-0.5)^n - \frac{13}{8}0.3^n + \frac{32}{11}0.6^n\right]u(n)$$

$$2.5-8 \quad 3 \cdot 3^n u(n) + 2u(n) - 6 \cdot 2^n u(n)$$

$$2.6-1 \quad (1) 10^{-4}; 10^4 \text{ Hz}; 10^4 \text{ 脉冲 / 每秒}$$

$$2.6-2 \quad (1) 0.6 \text{ ms } (2) 1667 \text{ 脉冲 / 每秒}$$

### 习题三

$$3.2-1 \quad (a) \quad x_1(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin k\omega_0 t$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{j2k\pi} e^{jk\omega_0 t}$$

$$(b) \quad x_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{(1-k^2)\pi} \cos \frac{k\pi}{2} \right] \cos k\omega_0 t$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[ \frac{2}{(1-k^2)\pi} \cos \frac{k\pi}{2} \right] e^{jk\omega_0 t}$$

$$(c) \quad x_3(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2E}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\omega_0 t$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{Ej}{(2k+1)\pi} e^{j(2k+1)\omega_0 t}$$

$$(d) \quad x_4(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{4}{k^2 \pi^2} \cos k\omega_0 t + \frac{2}{k\pi} \sin k\omega_0 t \right), k \text{ 为奇数}$$

$$x_4(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{4}{k^2 \pi^2} - j \frac{1}{k\pi} \right) e^{jk\omega_0 t}, k \text{ 为奇数}$$

$$3.2-2 \quad (2) \text{ 输入信号的直流分量幅度} = 0; \text{ 输出信号的直流分量幅度} = 2/\pi$$

$$(3) \quad \frac{2(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}$$

$$3.2-5 \quad (1) e^{-jk\omega_0 t_0} X_k \quad (2) jk\omega_0 X_k$$

$$(3) X_{k-1} \quad (4) X_{-k}$$

$$(5) X_{-k}^* \quad (6) \frac{X_k}{jk\omega_0} \quad (k \neq 0)$$

$$(7) X_k$$

$$3.2-6 \quad (1) x(t) = 2e^{-j(3\omega_0 t - \pi/2)} + 3e^{-j(\omega_0 t - 3)} + 2 + 3e^{j(\omega_0 t - 3)} + 2e^{j(3\omega_0 t - \pi/2)}$$

$$(3) x(t) = 2 + 4\cos(\omega_0 t - 3) + 6\cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

3.2-7 (1) 间隔 1000kHz, 带宽 2000kHz

$$(2) \text{间隔 } \frac{1}{3} \times 1000\text{kHz}, \text{带宽 } \frac{2}{3} \times 2000\text{kHz}$$

$$(3) 2/\pi, 6/\pi, 1:3$$

$$(4) 1:1$$

$$3.2-8 \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{Ej}{(2k+1)\pi} \cdot \frac{1}{1+j(2k+1)\Omega} e^{j(2k+1)\Omega t}$$

$$3.2-9 \quad (1) \frac{1}{2}\sin 8t - \frac{1}{2}\sin 2t; \quad (3) -\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$3.3-1 \quad X_1(j\omega) = \frac{2E}{j\omega} \left( \frac{2}{\omega\tau} \sin \frac{\omega\tau}{2} - \cos \frac{\omega\tau}{2} \right); \quad X_2(j\omega) = \frac{E}{j\omega} + \frac{E}{\omega^2\tau} (1 - e^{-j\omega\tau})$$

$$X_3(j\omega) = \frac{E}{2} \cdot \frac{2\pi\tau}{4\pi^2 - \omega^2\tau^2} (1 - e^{-j\omega\tau}); \quad X_4(j\omega) = \frac{2\pi\tau Ej}{\omega^2\tau^2 - 4\pi^2} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$3.3-2 \quad (1) \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * X(j\omega) + \frac{1}{2} X\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

$$(2) \frac{1}{2} \{ 2\pi\delta(\omega + \omega_0) + 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + mX[j(\omega + \omega_0)] + mX[j(\omega - \omega_0)] \}$$

$$(3) \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \cdot j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$(4) \frac{1}{3} X\left(j\frac{\omega}{3}\right) e^{-j2\omega}$$

$$(5) j \frac{dX(j\omega)}{d\omega} + 2X(j\omega)$$

$$(6) j\omega X(j\omega) + X^*(-j\omega)$$

$$(7) X^2(j\omega) e^{-j\omega}$$

$$(8) -je^{-j\omega} \frac{dX(-j\omega)}{d\omega}$$

$$3.3-3 \quad X(j\omega) = \frac{1}{\omega^2} (e^{-j\omega} - 1) - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega}$$

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{\omega^2} (1 - e^{j\omega}) - \frac{1}{j\omega}$$

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{\omega^2} (e^{j\omega} - 1) + \frac{1}{j\omega} e^{j\omega}$$

$$X_3(j\omega) = \frac{1}{\omega^2} (e^{-2j\omega} - 1) - \frac{2}{j\omega} e^{-2j\omega}$$

$$X_4(j\omega) = \frac{1}{\omega^2} (e^{2j\omega} - e^{j\omega}) + \frac{1}{j\omega} e^{2j\omega}$$

$$X_5(j\omega) = \frac{1}{\omega^2} (e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}) - \frac{1}{j\omega} e^{-2j\omega}$$

$$X_5(j\omega) = \frac{2}{\omega^2} (e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}) - \frac{2}{j\omega} e^{-2j\omega}$$

- 3.3-4 (1)  $G_{4\pi}(\omega)e^{-2j\omega}$ ; (2)  $2\pi e^{-a|\omega|}$ ; (3)  $\frac{1}{2}\Lambda_{8\pi}(\omega)$ ;  
 $a > 0$  时,  $2\pi e^{a\omega}u(-\omega)$   
 (4)  $a < 0$  时,  $-2\pi e^{a\omega}u(\omega)$   
 $a = 0$  时,  $-\pi \operatorname{sgn}(\omega)$
- 3.3-5 (1)  $\frac{1}{2}\Lambda_{\omega_2-\omega_1}(\omega) * [\delta(\omega-2\omega_0) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega+2\omega_0)]$   
 (2)  $\frac{1}{2\pi}\Lambda_{\omega_2-\omega_1}(\omega) * \Lambda_{\omega_2-\omega_1}(\omega) * [\delta(\omega-2\omega_0) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega+2\omega_0)]$   
 (3)  $X[j(\omega-\omega_0)]$   
 (4)  $\frac{1}{2}\{X[j(\omega+\omega_0)] + X[j(\omega-\omega_0)]\}$
- 3.3-6  $\frac{\tau}{4}\left[Sa^2\left(\frac{\omega-\omega_0}{4}\right)\tau + Sa^2\left(\frac{\omega+\omega_0}{4}\right)\tau\right]$
- 3.3-7 (1)  $e^{-(3+j2)t}u(t)$ ; (2)  $e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t)$   
 (3)  $1 + 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$  (4)  $\delta(t) - e^{-5t}u(t)$   
 (5)  $\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2\tau}G_{2\tau}(t)$ ; (6)  $\frac{1}{2}\Lambda_4(t-2)$
- 3.3-8 (1) (a)  $tu(t) - u(t) + e^{-t}u(t)$ ; (b)  $tu(t) - u(t) + e^{-t}u(t) - r(t-1)$   
 (c)  $\frac{1}{2}[e^{-t} - e^{-3t}]u(t)$ ; (d)  $\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{10}\sin 3t - \frac{3}{10}\cos 3t$   
 (2)  $\left(-\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t}\right)u(t)$   
 (3)  $(e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$   
 (4)  $\left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t) - \left[\frac{3}{2} - 2e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]u(t-1)$
- 3.3-9 (1)  $2e^{-3t}u(t) - 2e^{-4t}u(t)$ ; (2)  $-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + 4e^{-3t}u(t) - \frac{7}{2}e^{-4t}u(t)$
- 3.3-10  $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 4x'(t)$ ;  $y(t) = 0.6656\cos(3t - 0.0555)$
- 3.3-11  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 \tau Sa\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
- 3.3-12 (1)  $\frac{2\omega_c}{\omega_c + 1} Sa(\omega_c t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2n\pi}{\omega_c + 1}\right)$ ; (2)  $\frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_2\left(t - \frac{2n\pi}{3}\right)$

#### 习题四

- 4.1-1 (1) 傅里叶变换和拉普拉斯变换都存在,

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, X(s) = \frac{1}{s}, \operatorname{Re}[s] > 0$$

- (2) 傅里叶变换和拉普拉斯变换都存在,

$$X(j\omega) = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}, X(s) = \frac{1}{s^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$$



(3) 傅里叶变换和拉普拉斯变换都存在,

$$X(j\omega) = 1, X(s) = 1, \operatorname{Re}[s] \geq -\infty$$

(4) 傅里叶变换和拉普拉斯变换都存在,

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}, X(s) = \frac{1}{s + 2}, \operatorname{Re}[s] \geq -2$$

(5) 傅里叶变换不存在, 拉普拉斯变换存在,

$$X(s) = \frac{1}{s - 2}, \operatorname{Re}[s] > 2$$

4.1-2 略

4.1-3 (1)  $\frac{1}{s(s+a)}$ ; (2)  $\frac{1}{s+1}e^{-2(s+1)}$ ; (3)  $\frac{s+3}{(s+1)^2}$ ; (4)  $2e^{-s_0} + 3$

(5)  $\frac{2s+1}{s^2+1}$ ; (6)  $\frac{\alpha^2}{(s+\beta)[(s+\beta)^2+\alpha^2]}$ ; (7)  $\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)e^{-s}$

4.1-4 (1)  $aX(as+1)$ ; (2)  $aX(as+a^2)$ ; (3)  $X(as+b)$

4.1-5 证明: 略 (1)  $\frac{1}{s^2}$ ; (2)  $\frac{1}{(s-a)^2}$

4.1-6 证明: 略 (1)  $\frac{\pi}{2} - \arctan s$  (2)  $\ln\left(\frac{s+4}{s+3}\right)$

4.1-7 略

4.1-8 (1) 0; (2) -1

4.1-9 (1)  $\frac{1}{2}$ ; (2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  不存在。

4.1-10 (1)  $\frac{1}{1+e^{-\frac{T}{2}s}}$ ; (2)  $\frac{1}{s(1-e^{-Ts})}(1-e^{-\frac{T}{2}s})$ ;

(3)  $X_3(s) = (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots)F(s) = \frac{\pi(1+e^{-s})}{(1-e^{-sT})(s^2+\pi^2)}$

4.2-1 (1)  $(-3e^{-2t} + 7e^{-3t})u(t)$ ; (2)  $\frac{1}{5}u(t) - \frac{1}{5}\cos(\sqrt{5}t)u(t)$

(3)  $-e^{-2t}u(t) + (t^2 - t + 1)e^{-t}u(t)$ ; (4)  $\frac{1}{4}[1 - \cos(t-1)]u(t-1)$

(5)  $(2\cos 2t + \sin 2t)e^{-t}u(t)$ ; (6)  $2\delta(t) + \left(3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\right)u(t)$

4.2-2 (1)  $e^{-t}u(t) - e^{-(t-t_0)}u(t-t_0)$ ; (2)  $\cos(\pi t)u(t) - \cos[\pi(t-t)]u(t-1)$

(3)  $tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$

(4)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$

(5)  $\sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$

4.3-1 (1)  $\frac{1}{4}(e^{-2t} - \sin 2t + \cos 2t)u(t)$

4.3-2 (1)  $(2e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$ ; (2)  $(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$

4.3-3 (a)  $u_L(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}, t \geq 0$ ; (b)  $u_C(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}, t \geq 0$

$$4.3-4 \quad i(t) = 6\delta(t) + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

4.4-1 略

$$4.4-2 \quad u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$4.4-3 \quad \frac{1}{2}\delta(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

$$4.4-4 \quad (1) H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

(2)

$$(a) h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

$$(b) h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

$$(c) h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$$

4.5-1

$$(1) H(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

(2) 稳定

$$4.5-2 \quad (1) H(s) = \frac{1}{s^2+a_1s+a_2}; \quad (2) H(s) = \frac{b_2+b_1s}{s^2+a_1s+a_2}$$

4.5-3 略

## 习题五

5.1-1

$$(1) y(t) = \sqrt{2}\cos(2t - 15^\circ)$$

$$(2) y(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t)$$

$$(3) y(t) = \sqrt{\frac{26}{5}}\cos(3t + 40^\circ + \arctan \frac{3}{2} + \arctan 3)$$

5.1-2

$$(1) y(t) = 7.5u(t)$$

$$(2) y(t) = \frac{\sqrt{13}}{4}\cos(2t + \arctg \frac{2}{3} - 30^\circ)u(t)$$

$$(3) y(t) = \frac{3\sqrt{2}}{61}\cos(3t + \arctg \frac{6}{5} - 180^\circ)u(t)$$

$$(4) y(t) = e^{j3t} \cdot \frac{3j+3}{-5+6j}u(t)$$

$$5.1-3 \quad y(t) = \frac{8\sqrt{2}\tau}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi t}{2\tau} - 45^\circ\right)$$

- 5.1-4  $|H(j\omega_0)| = A; t_0 = -\frac{1}{\omega_0} \angle H(j\omega_0)$
- 5.2-1  $R_1 = 1, R_2 = 1, k = 1$
- 5.2-2 当  $\omega_c \geq \frac{1}{2}, y(t) = \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - t_d)\right] + \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - T - t_d)\right]$ , 满足无失真传输  
 当  $\omega_c < \frac{1}{2}, y(t) = 2\omega_c \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] + 2\omega_c \text{Sa}[\omega_c(t - T - t_d)]$ , 滤掉了信号中  $> \omega_c$  的分量。
- 5.2-3 (1)  $X_1(j\omega) = 10^6 \text{Sa}\left(\frac{1000\omega}{2}\right), X_2(j\omega) = 1$   
 (2)  $Y_1(j\omega) = 10^6 \text{Sa}\left(\frac{1000\omega}{2}\right) \cdot G_{40000\pi}(\omega), Y_2(j\omega) = G_{20000\pi}(\omega)$   
 (3)  $y_1(t)$  带宽为  $40000\pi, y_2(t)$  带宽为  $20000\pi, y(t)$  带宽为  $20000\pi$ 。
- 5.2-4 (1)  $K = 1$   
 (2) 是失真系统。原因略。
- 5.3-1  $H(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2}(1 - 2e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T}),$   
 $h(t) = \frac{1}{2}t \text{sgn}(t) - (t - T) \text{sgn}(t - T) + \frac{1}{2}(t - 2T) \text{sgn}(t - 2T)$
- 5.3-2  $y(t) = \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \cdot \cos\omega_0 t$
- 5.3-3  $h(t) = \delta(t - t_d) - \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)]$
- 5.3-4 (1)  $RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_i(t)$   
 (2)  $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$ , 该电路允许低频信号通过而阻止高频信号通过。  
 (3)  $h(t) = \omega_c e^{-\omega_c t} u(t), s(t) = [1 - e^{-\omega_c t}] u(t)$
- 5.4-1 (1) 低通。(2) 带通。(3) 高通。(4) 全通
- 5.4-2  $|X(j\omega)| = 1$
- 5.4-3 (a)  $\omega = 0$  时,  $|H(j\omega)| = 1/2; \omega \rightarrow \infty$  时,  $|H(j\omega)| = 1$ , 高通相频特性: 相角为  $\theta = \arctan \frac{\omega}{2 + \omega^2}$   
 (b)  $\omega = 0$  时,  $|H(j\omega)| = 2; \omega \rightarrow \infty$  时,  $|H(j\omega)| = 1$ , 低通相频特性: 相角为  $\theta = \arctan \frac{-\omega}{2 + \omega^2}$
- 5.4-4  $H(s) = \frac{s}{(s + a)^2 + 100}, a > 0$

## 习题六

- 6.1-1  $|\omega| > 5000\pi$
- 6.1-2 (1)  $T = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{\pi}{100}, f_s = \frac{100}{\pi}$

$$(2) T = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{\pi}{200}, f_s = \frac{200}{\pi}$$

$$(3) f_s = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{100}{\pi}, T = \frac{\pi}{100}$$

$$(4) T = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{\pi}{120}, f_s = \frac{120}{\pi}$$

6.1-3 (1) 和(3).

6.1-4 (1) 4000Hz (2) 7000Hz (3) 340Hz

6.1-5 (a) 错; (b) 对; (c) 对。

$$6.1-6 T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

6.1-7 (1)  $f_0$  (2)  $f_0$  (3)  $2f_0$  (4)  $3f_0$

6.2-2 (1)  $y(t) = \frac{1}{5} \text{Sa}(200\pi t)$ , (2)  $y(t) = \frac{1}{5} \text{Sa}(200\pi t)$ , (3) 出现混叠

$$6.2-4 (1) F[y(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jn\omega_s) \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

$$(2) \frac{\pi}{T} \geq \omega_m$$

$$(3) H(j\omega) = \begin{cases} \frac{T}{\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}}} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \omega_m < \omega_c < (\omega_s - \omega_m)$$

$$6.3-1 H(j\omega) = T \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

6.3-2 (1)  $h(t) = \frac{d}{dt} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{T}t\right)$  (2) 不唯一。

6.4-1 (1) 不会混叠; (2)  $y(t) = \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(k\pi t)$

$$6.5-1 (1) x(t) = \frac{1}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{t-2}{2}\right), (2) x(t) = \frac{50}{2\pi} \text{Sa}^2\left[\frac{50\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2}\right],$$

$$(3) x(t) = \frac{1}{\pi} \cos(4\pi t), (4) x(t) = \frac{8}{\pi} \sin(4\pi t) \text{Sa}(4t)$$

## 习题七

$$7.1-1 X_k = 2\left(1 + \cos \frac{k\pi}{2}\right);$$

$$7.1-2 (1) 2e^{j0.4\pi k} + e^{j(0.8\pi k + \pi/2)} + e^{j(1.2\pi k - \pi/2)} + 2e^{j1.6\pi k}$$

$$(2) e^{j(0.8\pi k + 1.6\pi)} + e^{j(1.2\pi k - 1.6\pi)}$$

$$7.1-4 Y_k = \begin{cases} X_{k/2}, k \text{ 为偶数} \\ 0, k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

- 7.2-1 (1) 1 (2)  $e^{-j\Omega n}$  (3)  $\frac{a}{e^{j\Omega} - a}$  (4)  $\frac{e^{j2\Omega}}{a(e^{j\Omega} - a)}$   
 (5)  $\frac{1}{1 + ae^{j\Omega}}$  (6)  $\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}$
- 7.2-2 (1)  $\frac{\sin 2\Omega}{\sin \Omega/2} e^{-j3\Omega/2}$ ; (2)  $2 + 3\cos\Omega + 2\cos 2\Omega + \cos 3\Omega$   
 (3)  $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}}$ ; (4)  $\frac{16e^{2j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$   
 (5)  $\frac{8e^{3j\Omega} - \frac{1}{4}e^{-2j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$ ; (6)  $e^{-2j\Omega}$
- 7.2-6 (1)  $\delta(n) - 2\delta(n-3) + 4\delta(n+2) + 3\delta(n-6)$ ;  
 (2)  $\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n+2) + \frac{1}{4}\delta(n-2)$   
 (3)  $\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi(n^2 - \frac{1}{4})} + \frac{1}{2}\delta(n+1) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

## 习题八

- 8.1-1 (1)  $z^{-1}, 0 < |z| \leq \infty$ ; (2)  $z, 0 \leq |z| < \infty$   
 (3)  $\frac{z}{z - \frac{1}{2}}, |z| > \frac{1}{2}$ ; (4)  $\frac{z}{z - \frac{1}{2}}, |z| < \frac{1}{2}$   
 (5)  $\frac{z}{z - 3}, |z| > 3$ ; (6)  $\frac{1}{z^9} \cdot \frac{z^{10} - 2^{-10}}{z - \frac{1}{2}}, |z| > 0$   
 (7)  $\frac{2z(z - \frac{5}{12})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}, |z| > \frac{1}{2}$ ; (8)  $\frac{1}{z - \frac{1}{2}}, |z| > \frac{1}{2}$   
 (9)  $\frac{-\frac{3}{2}z}{(z-2)(z - \frac{1}{2})} \frac{1}{2} < |z| < 2$ ; (10)  $z$  变换不存在。
- 8.1-2 (1)、(2)、(3)、(6)、(7)、(8)、(9) 的收敛域包含单位圆,其离散时间傅里叶变换存在。  
 其余信号的收敛域不包含单位圆,离散时间傅里叶变换不存在。
- 8.1-3 略
- 8.1-4 (1) 1, 0  
 (2) 0, 2  
 (3) 1, 不存在
- 8.1-5  $\frac{1}{a-1}(a^{n+1} - 1)u(n) - \frac{1}{a-1}(a^{n-N+1} - 1)u(n-N)$

- 8.1-6 (1)  $x(n) = \delta(n)$ ; (2)  $x(n) = \delta(n+3)$   
 (3)  $x(n) = \delta(n-1)$ ; (4)  $x(n) = \{2, 1, 0, -2\}_{-1} = \delta(n) + 2\delta(n+1) - 2\delta(n-2)$   
 (5)  $x(n) = a^n u(n)$ ; (6)  $x(n) = -a^n u(-n-1)$
- 8.1-7 (1)  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$   
 (2)  $x(n) = -\frac{1}{6}\delta(n) - \frac{1}{2}2^n u(n) + \frac{2}{3}3^n u(n)$   
 或  $x(n) = -2^{n-1}u(n-1) + 2 \times 3^{n-1}u(n-1)$
- 8.1-8  $x(n) = -\frac{1}{3}x_1(n) + \frac{1}{3}x_2(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n u(n) - \frac{1}{3}2^n u(-n-1)$
- 8.2-1 (1)  $y(n) = 0.45 \times 0.9^n u(n) + 0.5u(n)$   
 (2)  $y(n) = \frac{13}{9}(-2)^n u(n) + \frac{1}{3}nu(n) - \frac{4}{9}u(n)$   
 (3)  $y(n) = u(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$
- 8.2-2 全响应  $y(n) = \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n \quad n \geq 0$   
 $y_{zi}(n) = (-1)^n - 2(-2)^n \quad n \geq 0$ ;  $y_{zs}(n) = -\frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}(2)^n$   
 $n \geq 0$ ;  
 $y_n(n) = \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n \quad n \geq 0$ ;  $y_f(n) = \frac{1}{3}(2)^n \quad n \geq 0$
- 8.3-1 若收敛域为  $10 < |z| \leq \infty$  则  $h(n) = 0.5^n u(n) - 10^n u(n)$ , 为因果不稳定系统。  
 若  $0.5 < |z| < 10$  则  $h(n) = 0.5^n u(n) + 10^n u(-n-1)$ , 为非因果稳定系统
- 8.3-2 (1)  $h(n) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{3} \cdot 2^n u(n)$   
 (2)  $h(n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - \frac{2}{3} \cdot 2^n u(-n-1)$   
 (3) 若  $h(n) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{2}{3} \cdot 2^n u(-n-1)$
- 8.3-3 (1)  $H(z) = \frac{z}{(z-2)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$  收敛域为  $|z| > 2$   
 (2)  $h(n) = -\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{5} \cdot 2^n u(n)$   
 (3)  $h(n) = -\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{2}{5} \cdot 2^n u(-n-1)$  非因果
- 8.3-4  $H(\Omega) = e^{-j\frac{3}{2}\Omega} \cos(\Omega) \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$

$$8.3-5 \quad H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

## 习题九

$$9.2-1 \quad (1) X(0) = 0, X(1) = 2 - 2j, X(2) = 0, X(3) = 2 + 2j$$

$$(2) X(0) = 0, X(1) = 4, X(2) = 0, X(3) = 0$$

$$(3) c = 1 \text{ 时}, X(0) = N \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$c \neq 1 \text{ 时}, X(k) = \frac{1 - c^N W_N^{kN}}{1 - c W_N^k} = \frac{1 - c^N}{1 - c W_N^k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(4) X(k) = \begin{cases} N/2j & k = 1 \\ -N/2j & k = N-1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$9.2-2 \quad X(k) = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$$

$$9.5-2 \quad \{1, 3, 3, 3, 2, 0\}$$

$$9.5-3 \quad (1) \text{ 当 } k = l \cdot r, l = 0, 1, \dots, N-1 \text{ 时}, Y(k) = X(k/r)$$

$$(2) \text{ 当 } k \neq l \cdot r \text{ 时}, Y(k) = \sum_{l=0}^{N-1} X(l) \frac{1}{N} e^{j\frac{\pi}{N}(l-\frac{k}{r})(N-1)} \frac{\sin\left[\pi\left(l-\frac{k}{r}\right)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N}\left(l-\frac{k}{r}\right)\right]}$$

$$9.5-4 \quad Y(k) = X(k)_N R_{rN}(k)$$

$$9.5-5 \quad X(k) = 1; Y(k) = 0.5$$

$$9.7-1 \quad (1) 20\text{ms}; (2) 0.5\text{ms}; (3) 40; (4) 80$$

## 习题十

$$10.2-1 \quad \text{定义 } z(n) = x(n) + jy(n), \text{ 其 DFT 为 } Z(k) \text{。则}$$

$$X(k) = \frac{1}{2}[\tilde{Z}(k) + \tilde{Z}^*(-k)]R_N(k), Y(k) = -j\frac{1}{2}[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)]R_N(k)。$$

$$10.2-2 \quad \text{提示: 利用频率抽取法和习题 1 结果。}$$

$$10.2-3 \quad \text{定义 } x(n) = x_1(n) + x_3(n), y(n) = x_2(n) + x_4(n), \text{ 利用习题 1 结果可求出 } X(k) \text{ 和 } Y(k) \text{。利用共轭对称性, 求得}$$

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + \tilde{X}(-k)]R_N(k), \quad X_2(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + \tilde{Y}(-k)]R_N(k)$$

$$X_3(k) = \frac{1}{2}[X(k) - \tilde{X}(-k)]R_N(k), \quad X_4(k) = \frac{1}{2}[Y(k) - \tilde{Y}(-k)]R_N(k)$$

10.2-5 (1)1.57s (2)0.01s

## 习题十一

11.2-3 (2)  $\Omega = \pi$ (高通)

11.2-4 脉冲响应不变法  $\Omega_p = 1.57$ , 双线性变换法  $\Omega_p = 1.33$ 。

11.2-5 (1)  $f_p = 1500\text{Hz}$ ; (2)  $f_p = 1612\text{Hz}$



## 参 考 文 献

- [1] B. P. Lathi. Signal Processing & Linear Systems. Oxford University Press, 1998.
- [2] 吴京等. 信号与系统分析(第二版). 长沙:国防科技大学出版社, 2004.
- [3] 吴大正. 信号与线性系统分析(第4版). 北京:高等教育出版社, 2005.
- [4] 乐正友. 信号与系统. 北京:清华大学出版社, 2004.
- [5] B. P. 拉兹著. 刘树棠等译. 线性系统与信号(第2版). 西安:西安交通大学出版社, 2006.
- [6] Michael J. Roberts 著. 胡剑凌等译. Signals and system. 北京:机械工业出版社.
- [7] Alan V. Oppenheim 著. 刘树棠译. Signals and system. 西安:西安交通大学出版社.
- [8] Alan V. Oppenheim 著. 刘树棠译. Discrete-Time Signals Processing. 西安:西安交通大学出版社.
- [9] 刘泉. 信号与线性系统习题详解. 武汉:华中科技大学出版社, 2003.
- [10] 张明友, 吕幼新编. 信号与系统复习考研例题详解. 北京:电子工业出版社, 2003.
- [11] 吴京. 信号与系统考试要点与真题精解. 长沙:国防科技大学出版社, 2007.
- [12] 李素芝. 时域离散信号处理. 长沙:国防科技大学出版社, 1994.
- [13] 胡广书. 数字信号处理 - 理论、算法与实现. 北京:清华大学出版社, 1997.
- [14] 周耀华. 数字信号处理. 上海:复旦大学出版社, 1991.
- [15] 吴湘淇. 信号、系统与信号处理. 北京:电子工业出版社, 1996.
- [16] 程佩青. 数字滤波与快速傅里叶变换. 北京:清华大学出版社, 1990.
- [17] 万建伟等. 信号处理仿真技术. 长沙:国防科技大学出版社, 2008.
- [18] Vinay K. Ingle 等. 刘树棠译. 数字信号处理——使用 MATLAB. 西安:西安交通大学出版社, 2002.
- [19] 张志涌等. 精通 MATLAB 6.5 版. 北京:北京航空航天大学出版社, 2003.
- [20] 丁玉美. 数字信号处理. 西安:西安电子科技大学出版社, 2001.
- [21] 应启珩等. 离散时间信号分析和处理. 北京:清华大学出版社, 2001.
- [22] 伯晓晨等. MATLAB 工具箱应用指南——信息工程篇. 北京:电子工业出版社, 2000.



# 信号分析与处理

## Signal Analysis and Processing (修订版)

本书系统地介绍了确定性信号、线性时不变系统及信号处理的基本理论、基本概念、基本分析方法。全书共11章，包括信号的基本概念、描述和基本运算，信号分析与处理的基本方法，连续和离散时间傅里叶变换、离散傅里叶变换及其快速算法、拉普拉斯变换、 $z$ 变换，连续和离散时间线性时不变系统分析方法，模拟和数字滤波器的基本原理及其设计。本书在编排上采取先信号后系统、先连续后离散、先时域后变换域，先理论后应用展开，符合学习的认知过程。每章配有大量的例题和习题，注重难点和重点的解析与分析，习题附有参考答案，附录中配有一些应用实例的MATLAB脚本。

本书可作为高等院校电子、通信、信息、自动化、光电、计算机等专业的本科生教材，也可供从事相关领域的科技人员参考。



策划编辑：陈晓莉  
责任编辑：陈晓莉  
封面设计：张 昱

ISBN 978-7-121-23854-3



9 787121 238543 >

定价：48.00 元